Министерство образования и науки Российской Федерации

Филиал Кубанского государственного университета
в г. Славянске-на-Кубани

А. Б. Шишкин

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

МЕРЫ ЖОРДАНА И ЛЕБЕГА

Учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественно-математическим профилям педагогического образования

Славянск–на–Кубани
2017

УДК 517.53
ББК 22.141я73
Ш655

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани

Шишкин, А. Б.
Ш655 Булевы алгебры. Меры Жордана и Лебега : учеб. пособие для студентов естественно-математических специальностей / А. Б. Шишкин. — Славянск–на–Кубани : Филиал Кубанского гос. ун-та в г. Славянске-на-Кубани, 2016. — 64 с. 300 экз.

Учебное пособие содержит изложение основных понятий и теорем аксиоматической теории меры. Оно включает вопросы продолжения меры в условиях абстрактной алгебры Буля. В качестве примера рассмотрены продолжения мер по Жордану и по Лебегу в пространстве $\mathbf{R}^n$. Пособие написано на основе лекций, в течение ряда лет читаемых автором в Армавирском государственном педагогическом университете, в Славянском-на-Кубани государственном педагогическом институте и в филиале Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани.

Предназначено для студентов естественно-математических профилей подготовки направления 44.03.01 Педагогическое образование. Оно может быть использовано при изучении математического анализа, теории функций действительной переменной, теории функций комплексной переменной и др.

УДК 517.53
ББК 22.141я73

Содержание

Введение

Понятие булевой алгебры хорошо известно. Ее интерпретации используются при аксиоматическом описании различных теорий. Так, например, булевы алгебры множеств лежат в основе аксиоматического подхода к теории меры. Булевы алгебры событий — к аксиоматической теории вероятности. Булева алгебра высказываний — к логике высказываний. И так далее. Отвлекаясь от конкретных интерпретаций, приходим к алгебре Буля, следовательно, — к единому введению в упомянутые теории. Такой подход представляется актуальным и с научной точки зрения и с точки зрения методики, в связи с естественным стремлением математики «от конкретного к общему». С научной точки зрения — это, например, развитие теории меры в булевых алгебрах (в, так называемых, алгебрах меры), с методической — разработка учебного материала, содержащего единый алгебраический аппарат, достаточный для введения в указанные теории в учебном процессе.

Другим мотивом, побудившим автора к написанию настоящего пособия, явилось отсутствие учебников, содержащих изложение вопросов продолжения меры в $\mathbf{R}^n$ по Жордану и по Лебегу с единых позиций. Авторы, как правило, ограничиваются либо изучением меры Жордана (например, в [4]), либо изучением меры Лебега (например, в [1]). Единство же отправных позиций в этих вопросах, во-первых, возможно (их контуры очерчены, например, в [1. Гл.V, §3, п.4], во-вторых, оно существенно облегчит освоение студентами основных понятий теории функций действительной переменной и теории функций комплексной переменной [5]. Содержание пособия отражает опыт автора, излагавшего студентам затронутые вопросы (в разное время и в разных учебных курсах).

1 Булевы алгебры

1.1 Определение булевой алгебры и сопутствующие понятия

1.1.1 Определение. Под алгеброй Буля понимается произвольный класс $\mathbf{A}$ объектов $A, B, C, ...$, в котором определены две бинарные операции «+» — сложение и «·» — умножение, со следующими свойствами:

1) для произвольных объектов $A, B \in \mathbf{A}$ класс $\mathbf{A}$ содержит $A + B$ и $AB := A \cdot B$ (замкнутость);

2) для произвольных объектов $A, B \in \mathbf{A}$ выполняются соотношения:

$$A + B = B + A,\ AB = BA$$

(коммутативность);

3) для произвольных объектов $A, B, C \in \mathbf{A}$ выполняются соотношения:

$$(A + B) + C = A + (B + C),\ (AB)C = A(BC)$$

(ассоциативность);

4) для произвольных объектов $A, B, C \in \mathbf{A}$ выполняются соотношения:

$$A(B + C) = AB + AC,\ A + BC = (A + B)(A + C)$$

(дистрибутивность);

5) для произвольного объекта $A \in \mathbf{A}$ выполняются соотношения:

$$A + A = A,\ A \cdot A = A$$

(идемпотентность);

6) в $\mathbf{A}$ существуют элементы 0 и 1 такие, что для произвольного объекта $A \in \mathbf{A}$ выполняются соотношения:

$$A + 0 = A,\ A \cdot 1 = A,\ A \cdot 0 = 0,\ A + 1 = 1;$$

7) для каждого объекта A класс $\mathbf{A}$ содержит объект $\overline{A}$ (дополнение объекта A), такой, что

$$A + \overline{A} = 1,\ A \cdot \overline{A} = 0.$$

Для обозначения операций в алгебре Буля $\mathbf{A}$ часто используют другие символы и их названия:

1) «$\cup$» — объединение, «$\cap$» — пересечение, «$1 \setminus A$» — абсолютное дополнение;

2) «$\vee$» — логическая сумма (дизъюнкция), «$\wedge$» – логическое произведение (конъюнкция), «$\overline{A}$» — отрицание.

При этом вместо $A + B$ пишут $A \cup B$ или $A \vee B$, а вместо $A \cdot B$ пишут $A \cap B$ или $A \wedge B$.

Упражнение 1 *Показать, что аксиомы алгебры Буля определяют элементы* 1 *и* 0 *однозначно* (у к а з а н и е: $\widetilde{1} = \widetilde{1} \cdot 1 = 1 \cdot \widetilde{1} = 1$, $\widetilde{0} = \widetilde{0} + 0 = 0 + \widetilde{0} = 0$).

Упражнение 2 *Показать, что для любого* A *из* $\mathbf{A}$ *аксиомы алгебры Буля определяют элемент* $\overline{A}$ *однозначно* (у к а з а н и е: $\widetilde{A} = \widetilde{A}(A + \overline{A}) = \widetilde{A} \cdot \overline{A} = \overline{A} \cdot \widetilde{A} = \overline{A}(A + \widetilde{A}) = \overline{A}$).

1.1.2 Следствия определения. В этом пункте рассмотрим свойства объектов алгебры Буля $\mathbf{A}$, которые вытекают непосредственно из определения, то есть не требуют при доказательстве сложных дополнительных построений.

Следствие 1 *Дополнение к* 1 *есть* 0, *а дополнение к* 0 *есть* 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Элементы 1 и 0 определены однозначно, следовательно, нам достаточно показать, что для любого A из $\mathbf{A}$ выполнены соотношения

$$A + \overline{1} = A, \ A \cdot \overline{0} = A, \ A \cdot \overline{1} = \overline{1}, \ A + \overline{0} = \overline{0}.$$

Проделаем это, указывая всякий раз над знаком равенства номер использованного свойства из определения алгебры Буля, на основании которого этот знак написан:

$$A + \overline{1} \overset{8}{=} (A + \overline{1}) \cdot 1 \overset{2}{=} 1 \cdot (A + \overline{1}) \overset{4}{=} 1 \cdot A + 1 \cdot \overline{1} \overset{7}{=} 1 \cdot A + 0 \overset{6}{=} 1 \cdot A \overset{2}{=} A \cdot 1 = A,$$

$$A \cdot \overline{0} \overset{6}{=} A \cdot \overline{0} + 0 \overset{6}{=} A \cdot \overline{0} + A \cdot 0 \overset{4}{=} A(\overline{0} + 0) \overset{2}{=} A(0 + \overline{0}) \overset{7}{=} A \cdot 1 \overset{6}{=} A,$$

$$A \cdot \overline{1} \overset{6}{=} A \cdot \overline{1} + 0 \overset{7}{=} A \cdot \overline{1} + 1 \cdot \overline{1} \overset{2}{=} \overline{1} \cdot A + \overline{1} \cdot 1 \overset{4}{=} \overline{1} \cdot (A + 1) \overset{6}{=} \overline{1} \cdot 1 \overset{7}{=} \overline{1},$$

$$A + \overline{0} \overset{6}{=} A \cdot \overline{0} + \overline{0} \overset{6}{=} A \cdot \overline{0} + \overline{0} \cdot 1 \overset{2}{=} \overline{0} \cdot A + \overline{0} \cdot 1 \overset{4}{=} \overline{0} \cdot (A + 1) \overset{6}{=} \overline{0} \cdot 1 \overset{6}{=} \overline{0}.$$

Существует и более простой способ доказательства данного следствия. Действительно, справедливость его следует из соотношений:

$$\overline{1} \overset{6}{=} \overline{1} \cdot 1 \overset{2}{=} 1 \cdot \overline{1} \overset{7}{=} 0, \ \overline{0} \overset{6}{=} \overline{0} + 0 \overset{2}{=} 0 + \overline{0} \overset{7}{=} 1.$$

■

Следствие 2 *Для любых* A *и* B *из* $\mathbf{A}$ *выполнен «закон поглощения»*

$$A(A + B) = A + AB = A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойствам дистрибутивности и идемпотентности

$$A(A+B) \overset{4}{=} AA + AB \overset{5}{=} A + AB.$$

С другой стороны,

$$A + AB \overset{6}{=} A \cdot 1 + AB \overset{4}{=} A(1+B) \overset{2}{=} A(B+1) \overset{6}{=} A \cdot 1 \overset{6}{=} A.$$

■

Следствие 3 *Если* $C + D = 1$ *и* $CD = 0$*, то* $D = \overline{C}$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость следствия вытекает из однозначности определения дополнения. ■

Следствие 4 *Для любых* A *и* B *из* $\mathbf{A}$ *выполнены «законы двойственности»:*

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \text{ (}\textit{первый закон де Моргана}\text{)},$$
$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \text{ (}\textit{второй закон де Моргана}\text{)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $C := A + B$ и $D := \overline{A} \cdot \overline{B}$. Для доказательства первого закона де Моргана нужно показать, что $D = \overline{C}$. Во–первых,

$$AD = A(\overline{A} \cdot \overline{B}) \overset{3}{=} (A \cdot \overline{A})\overline{B} \overset{7}{=} 0 \cdot \overline{B} \overset{2}{=} \overline{B} \cdot 0 \overset{6}{=} 0.$$

$$BD = B(\overline{A} \cdot \overline{B}) \overset{2}{=} (\overline{A} \cdot \overline{B})B \overset{3}{=} \overline{A}(\overline{B}B) \overset{2}{=} \overline{A}(B\overline{B}) \overset{7}{=} \overline{A} \cdot 0 \overset{6}{=} 0,$$

$$CD = (A+B)D \overset{2}{=} D(A+B) \overset{4}{=} DA + DB = 0 + 0 = 0.$$

Во–вторых,

$$C + D = (A+B) + \overline{A} \cdot \overline{B} \overset{3}{=} A + (B + \overline{A} \cdot \overline{B}) \overset{4}{=}$$

$$\overset{4}{=} A + (B + \overline{A})(B + \overline{B}) \overset{7}{=} A + (B + \overline{A}) \cdot 1 \overset{6}{=} A + (B + \overline{A}) \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} A + (\overline{A} + B) \overset{3}{=} (A + \overline{A}) + B \overset{7}{=} 1 + B \overset{2}{=} B + 1 \overset{6}{=} 1.$$

Таким образом, $C + D = 1$ и $CD = 0$. В силу предыдущего следствия имеем $D = \overline{C}$, то есть первый закон де Моргана доказан. Убедимся в выполнимости второго закона де Моргана. Для этого положим $C := AB$ и $D := \overline{A} + \overline{B}$. Нужно показать, что $D = \overline{C}$. Во–первых,

$$C\overline{A} = (AB)\overline{A} \overset{2}{=} \overline{A}(AB) \overset{3}{=} (\overline{A}A)B \overset{2}{=} (A\overline{A})B \overset{7}{=} 0 \cdot B \overset{2}{=} B \cdot 0 \overset{6}{=} 0,$$

$$C\overline{B} = (AB)\overline{B} \overset{3}{=} A(B\overline{B}) \overset{7}{=} A \cdot 0 \overset{6}{=} 0,$$

$$CD = C(\overline{A} + \overline{B}) \overset{4}{=} C\overline{A} + C\overline{B} = 0 + 0 \overset{6}{=} 0.$$

Во–вторых,

$$C + D = AB + (\overline{A} + \overline{B}) \overset{3}{=} (AB + \overline{A}) + \overline{B} \overset{2}{=} (\overline{A} + AB) + \overline{B} \overset{4}{=}$$

$$\overset{4}{=} (\overline{A} + A)(\overline{A} + B) + \overline{B} \overset{2}{=} (A + \overline{A})(\overline{A} + B) + \overline{B} \overset{7}{=} 1 \cdot (\overline{A} + B) + \overline{B} \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} (\overline{A} + B) \cdot 1 + \overline{B} \overset{6}{=} (\overline{A} + B) + \overline{B} \overset{2}{=} \overline{A} + (B + \overline{B}) \overset{7}{=} \overline{A} + 1 \overset{6}{=} 1.$$

Таким образом, $C + D = 1$ и $CD = 0$, то есть $D = \overline{C}$. ■

Следствие 5 *Для любого A из $\mathbf{A}$ выполнено соотношение*

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $C := \overline{A}$ и $D := A$. Для доказательства следствия нужно показать, что $D = \overline{C}$. Во-первых,

$$CD = \overline{A}A \overset{3}{=} A\overline{A} \overset{7}{=} 0.$$

Во-вторых,

$$C + D = \overline{A} + A \overset{3}{=} A + \overline{A} \overset{7}{=} 1.$$

Таким образом, $C + D = 1$ и $CD = 0$, то есть $D = \overline{C}$. ■

Следствие 6 *Для любых A, B, C из $\mathbf{A}$ выполнены соотношения:*

$$A + \overline{A}B = A + B, \;\; AB + AC + B\overline{C} = AC + B\overline{C}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся в выполнимости первого соотношения. Имеем

$$A + \overline{A}B \overset{6}{=} A(B + 1) + \overline{A}B \overset{4}{=} (AB + A \cdot 1) + \overline{A}B \overset{2}{=} (A \cdot 1 + BA) + B\overline{A} \overset{3}{=}$$

$$\overset{3}{=} A \cdot 1 + (BA + B\overline{A}) \overset{4}{=} A \cdot 1 + B(A + \overline{A}) \overset{7}{=} A \cdot 1 + B \cdot 1 \overset{6}{=} A + B.$$

Далее убедимся в выполнимости второго соотношения. Для этого воспользуемся уже доказанным вторым соотношением. Получим

$$AB + AC + B\overline{C} \overset{3}{=} AC + AB + B\overline{C} = AC + \overline{AC}AB + B\overline{C}.$$

Используя второй закон де Моргана, имеем

$$AB + AC + B\overline{C} = AC + (\overline{A} + \overline{C})AB + B\overline{C} \overset{2,4}{=} AC + \overline{A}AB + \overline{C}AB + B\overline{C} \overset{2,3}{=}$$

$$\overset{2,3}{=} AC + B(\overline{A}A) + (B\overline{C})A + B\overline{C} \overset{3}{=} AC + B(\overline{A}A) + B\overline{C} + (B\overline{C})A.$$

Осталось отметить, что по закону поглощения $B\overline{C} + (B\overline{C})A = B\overline{C}$ а по свойствам 6 и 7 $B(\overline{A}A) = B \cdot 0 = 0$. ■

1.1.3. Производные бинарные операции. Вместе с аксиоматически определенными бинарными операциями в алгебрах Буля часто рассматривают и другие бинарные операции, определенные уже конструктивно. Среди этих операций рассмотрим две наиболее часто используемые. Во–первых, для любых двух элементов A и B из $\mathbf{A}$ определена *разность* $A - B$ (или *дополнение* B *до* A), определяемая однозначно соотношением

$$A - B := A\overline{B}.$$

Во–вторых, для любых двух элементов A и B из $\mathbf{A}$ определена *симметрическая разность* $A\Delta B$, определяемая соотношением

$$A\Delta B := (A - B) + (B - A) = A\overline{B} + B\overline{A}.$$

Отметим, что операция симметрической разности является коммутативной $A\Delta B = B\Delta A$, что и отражено в ее названии.

Упражнение 3 *Показать, что для всяких* A *и* B *из* $\mathbf{A}$ *выполнены соотношения:*

$$A - A = A\Delta A = 0,\ 1 - A = \overline{A},$$

$$A - B = A\Delta(AB) = A - AB. \tag{1}$$

$$A\Delta B = (A + B) - AB,$$

$$A\Delta B = (1 - A)\Delta(1 - B) = \overline{A}\Delta\overline{B}.$$

$$A + B = 1 - (\overline{A} \cdot \overline{B}),$$

$$A + B = (A\Delta B)\Delta(AB). \tag{2}$$

$$AB = A - (A - B),$$

$$AB = 1 - (\overline{A} + \overline{B}).$$

Упражнение 4 *Показать, что для всяких A, B и C из* $\mathbf{A}$ *выполнены соотношения:*

$$A(B - C) = AB - AC,$$

$$A - BC = (A - B) + (A - C).$$

Упражнение 5 *Показать, что для всяких $A_1, ..., A_n$ из* $\mathbf{A}$ *выполнено соотношение*

$$A_1 \cdot ... \cdot A_n = 1 - (\overline{A_1} + ... + \overline{A_n}).$$

1.1.4. Частичный порядок. Всякая алгебра Буля может быть упорядочена с помощью частичного порядка, тесно связанного с бинарными операциями. Прежде чем определить порядок, убедимся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1 *Соотношения $A + B = B$ и $AB = A$ эквивалентны друг другу (свойство совместимости).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если $A+B = B$, то $AB = A(A+B) = A + AB = A$. Последнее равенство записано на основании закона поглощения. Обратно, если $AB = A$, то $A + B = AB + B = B + BA = B$. ■

Рассмотрим бинарное отношение, определяемое так:

$$A \leq B \text{ тогда и только тогда, когда } A + B = B.$$

Покажем, что оно удовлетворяет аксиомам частичного порядка: для любых $A < B < C$ из $\mathbf{A}$

1) $A \leq A$ (рефлексивность);

2) если $A \leq B$ и $B \leq A$, то $A = B$ (антисимметричность);

3) если $A \leq B$ и $B \leq C$, то $A \leq C$ (транзитивность).

Рефлексивность отношения $A \leq B$ является следствием идемпотентности $A + A = A$. Антисимметричность вытекает из коммутативности сложения. Действительно, если $A + B = B$ и $B + A = A$, то $A = B$. Транзитивность, в свою очередь, следует из ассоциативности сложения. Действительно, $A + C = A + (B + C) = (A + B) + C = B + C = C$.

Упражнение 6 *Соотношение $A \leq B$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $A\overline{B} = 0$.*

Упражнение 7 *Соотношение $A \le B$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $\overline{B} \le \overline{A}$.*

По свойству совместимости

$$A \le B \text{ тогда и только тогда, когда } AB = A.$$

Но и это еще не исчерпывает глубокой связи, введенного нами частичного порядка с операциями сложения и умножения. Для того чтобы вскрыть ее нам потребуется понятие грани.

Выделим произвольную совокупность $\{A_\sigma\} := \{A_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ объектов алгебры Буля $\mathbf{A}$. Будем называть элемент A из $\mathbf{A}$ *верхней гранью* совокупности $\{A_\sigma\}$ и обозначать $\sup\{A_\sigma\}$, если выполнены условия:

1) $A_\sigma \le A$ для любого $\sigma \in \Sigma$;

2) если $B \in \mathbf{A}$ и $A_\sigma \le B$ для любого $\sigma \in \Sigma$, то $A \le B$.

Первое условие означает, что A мажорирует совокупность $\{A_\sigma\}$, а второе условие означает, что A — наименьшая из мажорант совокупности $\{A_\sigma\}$. *Нижняя грань* $\inf\{A_\sigma\}$ совокупности $\{A_\sigma\}$ определяемая как наименьшая из минорант совокупности $\{A_\sigma\}$, следовательно, условия 1) и 2) заменяются условиями:

1) $A \le A_\sigma$ для любого $\sigma \in \Sigma$;

2) если $B \in \mathbf{A}$ и $B \le A_\sigma$ для любого $\sigma \in \Sigma$, то $B \le A$.

Предложение 2 *Во всякой алгебре Буля*

$$A + B = \sup\{A, B\},\ \ AB = \inf\{A, B\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений

$$A + (A + B) = (A + A) + B = A + B,$$

$$B + (A + B) = (A + B) + B = A + (B + B) = A + B$$

вытекает, что сумма $A + B$ мажорирует совокупность $\{A, B\}$. Убедимся, что эта мажоранта является наименьшей. Пусть $C \le A$ и C мажорирует совокупность $\{A, B\}$, то есть $A \le C$ и $B \le C$. Тогда

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + C = C,$$

то есть $A + B \le C$. Докажем второе равенство. Из соотношений

$$(AB)A = (BA)A = B(AA) = BA = AB,$$

$$(AB)B = A(BB) = AB$$

вытекает, что AB минорирует совокупность $\{A, B\}$. Убедимся, что эта миноранта является наибольшей. Пусть $C \leq A$ и C минорирует совокупность $\{A, B\}$, то есть $C \leq A$ и $C \leq B$. Тогда

$$C(AB) = (CA)B = CB = C,$$

то есть $AB \leq C$. Все доказано. ■

Упражнение 8 *Доказать, что для всяких A, B, C и D из $\mathbf{A}$ справедливы следующие утверждения:*

1) *если $A \leq B$, то $AC \leq BC$;*
2) *если $A \leq B$ и $B \leq A$, то $A = B$;*
3) *равенство $A + B = 0$ влечет равенство $A = 0$;*
4) *если $A \leq B$ и $C \leq D$, то $A + C \leq B + D$;*
5) *если $AC \leq D$, то $A \leq DC + A\overline{C}$;*
6) *если $A \leq B$ и $AC \leq D$, то $A \leq DC + B\overline{C}$.*

Упражнение 9 *Доказать, что во всякой алгебре Буля выполнены соотношения:*

$$\sum_{i=1}^{n} A_i := A_1 + ... + A_n = \sup\{A_1, ..., A_n\}, \tag{3}$$

$$\prod_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cdot ... \cdot A_n = \inf\{A_1, ..., A_n\} \tag{4}$$

(у к а з а н и е: доказать, что

$$\sup\{A_1, ..., A_n\} = \sup\{\sup\{A_1, ..., A_{n-1}\}, A_n\},$$

$$\inf\{A_1, ..., A_n\} = \inf\{\inf\{A_1, ..., A_{n-1}\}, A_n\},$$

и воспользоваться методом математической индукции).

Упражнение 10 *Показать, что для произвольных объектов A, B, C, D из алгебры Буля $\mathbf{A}$ выполняются следующие соотношения:*

$$A \leq B + A\Delta B, \;\; A \leq B + (A - B),$$

$$(A + B)\Delta(C + D) \leq A\Delta C + B\Delta D,$$

$$(A - B)\Delta(C - D) \leq A\Delta C + B\Delta D.$$

1.1.5. Бесконечные суммы и произведения. Соотношения (3), (4) делают естественными следующие определения. Пусть $\{A_\sigma\} := \{A_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ — произвольная совокупность объектов из алгебры Буля $\mathbf{A}$. *Бесконечная сумма* и *бесконечное произведение* — это элементы из $\mathbf{A}$, определяемые следующими соотношениями:

$$\sum_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma := \sup_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma = \sup\{A_\sigma\},$$

$$\prod_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma := \inf_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma = \inf\{A_\sigma\}.$$

Бесконечные суммы и бесконечные произведения могут не существовать. Однако, есть такие алгебры Буля, в которых бесконечные суммы и бесконечные произведения существуют всегда. Такие алгебры принято называть *σ–алгебрами Буля.*

Предложение 3 *Во всякой σ–алгебре Буля* $\mathbf{A}$ *выполняются бесконечные законы де Моргана*

$$\overline{\sum_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma} = \prod_{\sigma\in\Sigma} \overline{A_\sigma} \ \textit{(первый закон)},$$

$$\overline{\prod_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma} = \sum_{\sigma\in\Sigma} \overline{A_\sigma} \ \textit{(второй закон)},$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $B := \sum_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma$, тогда $A_\sigma \le B$, то есть $A_\sigma B = A_\sigma$ для любых $\sigma \in \Sigma$. В силу (конечных) законов де Моргана $\overline{A_\sigma} + \overline{B} = \overline{A_\sigma}$, то есть $\overline{B} \le \overline{A_\sigma}$ для любых $\sigma \in \Sigma$. С другой стороны, если $C \le \overline{A_\sigma}$ для любых $\sigma \in \Sigma$, то $A_\sigma \le \overline{C}$ для любых $\sigma \in \Sigma$ и потому $B \le \overline{C}$ или $C \le \overline{B}$, что и доказывает первый закон де Моргана. Перейдем к доказательству второго закона. Положим $B := \prod_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma$, тогда $B \le A_\sigma$ для любых $\sigma \in \Sigma$, то есть $\overline{A_\sigma} \le \overline{B}$ для любых $\sigma \in \Sigma$. С другой стороны, если $\overline{A_\sigma} \le C$ для любых $\sigma \in \Sigma$, то $\overline{C} \le \overline{A_\sigma}$ для любых $\sigma \in \Sigma$ и потому $\overline{C} \le B$ или $\overline{B} \le C$, что и доказывает второй закон де Моргана. ■

Предложение 4 *Если* $AA_\sigma \le D$ *для любых* $\sigma \in \Sigma$, *то*

$$\sum_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma \le D + \overline{A}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\sigma \in \Sigma$ имеем

$$A_\sigma = A_\sigma(A + \overline{A}) = A_\sigma A + A_\sigma \overline{A}.$$

При этом $A_\sigma A + D = D$, $A_\sigma \overline{A} + \overline{A} = \overline{A}$ и

$$A_\sigma A + A_\sigma \overline{A} + D + \overline{A} = D + \overline{A}.$$

Значит, $A_\sigma \leq D + \overline{A}$ и по определению верхней грани

$$\sum_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma := \sup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \leq D + \overline{A}.$$

Предложение доказано. ■

Предложение 5 *Во всякой σ–алгебре Буля* **A** *выполняются бесконечные дистрибутивные законы:*

$$A \sum_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma = \sum_{\sigma \in \Sigma} A A_\sigma,$$

$$A + \prod_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma = \prod_{\sigma \in \Sigma} (A + A_\sigma).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим первый дистрибутивный закон. Пусть $B := \sum_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma$ и $C := AB$. Тогда

$$AA_\sigma + C = A(A_\sigma + B) = AB = C,$$

то есть $AA_\sigma \leq C$ для любых $\sigma \in \Sigma$. Выберем произвольный элемент D из **A** такой, что $AA_\sigma \leq D$ для любых $\sigma \in \Sigma$. Тогда по предыдущему предложению $B \leq D + \overline{A}$ и

$$AB + A(D + \overline{A}) = A(B + D + \overline{A}) = A(D + \overline{A}).$$

Значит,

$$C := AB \leq A(D + \overline{A}) = AD + A\overline{A} = AD \leq D$$

Таким образом, по определению верхней грани $C = \sum_{\sigma \in \Sigma} AA_\sigma$. Что и доказывает первый дистрибутивный закон. Второй дистрибутивный закон вытекает из первого дистрибутивного закона и бесконечных законов де Моргана. ■

Упражнение 11 *Показать, что в любой σ-алгебре Буля имеет место формула*

$$\prod_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma = 1 - \sum_{\sigma\in\Sigma}(1 - A_\sigma).$$

Упражнение 12 *Показать, что в любой σ-алгебре Буля имеет место формула*

$$\sum_{\sigma\in\Sigma} A_\sigma + \sum_{\sigma\in\Sigma} B_\sigma = \sum_{\sigma\in\Sigma}(A_\sigma + B_\sigma).$$

1.2 Примеры алгебр Буля

1.2.1. Алгебры множеств. Пусть E — некоторое множество. Тут сразу нужно подчеркнуть различие между понятием «множества» и понятием «класса» (необходимость такого различения возникла в связи с обнаружением известных парадоксов классической теории множеств, связанных с рассмотрением, например, такого объекта как «множество всех подмножеств»).

Придерживаясь получившей широкое распространение аксиоматической теории множеств Геделя–Бернайса, можно сказать, что «множество» — это такой «класс», который служит элементом множества своих подмножеств. Тогда как существуют «классы», называемые собственными, которые не являются элементами множеств своих подмножеств, то есть не являются «множествами». Так, например, классы всех множеств, всех топологических пространств, всех групп и т.д. являются собственными классами и не являются множествами. Таким образом, выбирая произвольное множество E, мы вправе считать, что множество всех подмножеств $\beta(E)$ множества E содержит его в качестве элемента.

Множество $\beta(E)$ (иногда называемое *булеаном* множества E) вместе с его любыми двумя элементами A и B содержит объединение

$$A \cup B := \{x \in E : x \in A \text{ или } x \in B\}$$

и пересечение

$$A \cap B := \{x \in E : x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Следовательно, $\beta(E)$ замкнуто относительно операций объединения и пересечения. При этом, очевидно, что эти операции коммутативны и ассоциативны, то есть

$$A \cup B = B \cup A,\ \ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$

$$A \cap B = B \cap A, \; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Более того, эти операции связаны дистрибутивными законами

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

Убедимся в этом на примере первого дистрибутивного закона. Для этого нужно показать, что всякий элемент множества, стоящего в левой части, является элементом множества, стоящего в правой части и наоборот. Пусть $x \in A \cap (B \cup C)$. Тогда $x \in A$ и $x \in B \cup C$. Значит, либо $x \in A$ и $x \in B$, либо $x \in A$ и $x \in C$, то есть либо $x \in A \cap B$, либо $x \in A \cap C$. А это означает, что $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Обратно. Пусть $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Тогда либо $x \in A \cap B$, либо $x \in A \cap C$. В любом случае $x \in A$ и $x \in B \cap C$. Значит, $x \in A \cap (B \cup C)$. Все доказано.

Вместе с тем, из определения операций «$\cup$» и «$\cap$» вытекает, что они обладают свойством идемпотентности

$$A \cup A = A \cap A = A.$$

Кроме того, для всякого A из $\beta(E)$ элементы E и $\emptyset$ удовлетворяют соотношениям

$$A \cup \emptyset = A, \; A \cap E = A, \; A \cap \emptyset = \emptyset, \; A \cup E = E.$$

Вместе с каждым элементом A множество $\beta(E)$ содержит $E \setminus A$ (теоретико-множественное дополнение) и при этом

$$A \cup (E \setminus A) = E, \; A \cap (E \setminus A) = \emptyset.$$

Таким образом, булеан $\beta(E)$ произвольного множества E является алгеброй Буля относительно операций «$\cup$» и «$\cap$» и теоретико-множественного дополнения. При этом роль единицы играет само множество E, как элемент булеана $\beta(E)$, а роль нуля играет пустое множество $\emptyset$.

1.2.2. Алгебры событий. Пусть $E^* = \{e\}$ — произвольное множество. Свяжем с E^* некоторый опыт, допускающий неограниченное число повторений, результаты которых будут зависеть от случая. Этот опыт состоит в том, что из множества E^* «наудачу» выбирают один элемент, причем предполагается, что все элементы множества E^* «равноправны». Для любого подмножества $A^* \subseteq E^*$ может случиться так, что «наудачу» выбранный элемент лежит в A^*. Таким образом, с каждым элементом A^* множества всех подмножеств $\beta(E^*)$ множества E^* мы можем связать некоторое событие A, а именно, событие, состоящее в следующем: в результате опыта выбран один из элементов множества A^*. При этом множество E^* называется *множеством исходов*, а элемент e из A^* называется *исходом*, *благоприятствующим событию* A. Если множество A^* состоит из одного элемента, то связанное с ним событие A называется *элементарным*, а совокупность E всех элементарных событий — *пространством элементарных событий*.

Когда A^* пробежит весь булеан $\beta(E^*)$, связанное с ним событие опишет множество $\mathbf{A}$, которое принято называть *алгеброй событий*. Целесообразность такого названия вытекает из следующих соображений. Между элементами $\mathbf{A}$ и $\beta(E^*)$ можно установить взаимно однозначное соответствие: событию $A \in \mathbf{A}$ соответствует множество $A^* \in \beta(E^*)$ всех исходов, благоприятствующих этому событию, с другой стороны, всякому множеству $A^* \in \beta(E^*)$ исходов соответствует событие $A \in \mathbf{A}$: в результате опыта выбран один из элементов множества A^*. Это соответствие позволяет перенести структуру алгебры Буля с $\beta(E^*)$ на $\mathbf{A}$. При этом сумма событий $A + B$ — это событие с множеством благоприятствующих исходов $A^* \cup B^*$; произведение событий $A \cdot B$ — это событие с множеством благоприятствующих исходов $A^* \cap B^*$; дополнение к событию A — событие с множеством благоприятствующих исходов $E^* \setminus A^*$; 0 — невозможное событие с пустым множеством благоприятствующих исходов; 1 — событие с множеством благоприятствующих исходов E^*.

1.2.3. Алгебры высказываний. Пусть E^* — произвольное множество и e — произвольный элемент из множества E^*. С каждым подмножеством A^* множества E^* свяжем утверждение A, которое состоит в следующем: элемент e принадлежит A^*. Характерным для таких утверждений является то, что по отношению к каждому из них мы всегда можем сказать истинно оно или ложно. По установившейся традиции такие утверждения принято называть *высказываниями*. Таким образом, с каждым множеством $A^* \subseteq E^*$ мы связали некоторое высказывание A. Когда множество A^* пробежит весь булеан $\beta(E^*)$ высказывание A опишет множество высказываний $\mathbf{A}$, на которое переносится структура алгебры Буля из $\beta(E^*)$. При этом сумма высказываний $A + B$ ($A \vee B$ — «A или B») — это высказывание: элемент e принадлежит $A^* \cup B^*$; произведение высказываний $A \cdot B$ ($A \wedge B$ — «A и B») — это высказывание: элемент e принадлежит $A^* \cap B^*$; дополнение (отрицание) высказывания («не A») — это высказывание: элемент e

принадлежит $E^* \setminus A^*$.

В том тривиальном случае, когда множество E^* состоит из одного элемента e, алгебра высказываний $\mathbf{A}$ состоит из двух высказываний: И (истинное высказывание) — элемент e принадлежит E^*; Л (ложное высказывание) — элемент e принадлежит $\emptyset$. Алгебра высказываний {И,Л} служит основой для определения булевых функций — основных объектов математической логики (точнее, двузначной символической логики).

1.2.4. Алгебра булевых функций. Булевой переменной называют переменную, принимающую значения в алгебре Буля {И,Л}. Введение булевой переменной позволяет говорить о булевых функциях (функция алгебры логики), принимающих значения в алгебре {И,Л}.

Строгое определение булевых функций проводится в два этапа. Сначала определяются элементарные булевы функции. К ним относятся:

1) булевы постоянные И и Л;

2) булевы переменные $X, Y, ...$;

3) дизъюнкция $X \vee Y$, конъюнкция $X \wedge Y$ и отрицание $\overline{X}$.

Уже затем определяется весь запас булевых функций — как запас всевозможных суперпозиций элементарных булевых функций. Иногда к запасу элементарных булевых функций присоединяют импликацию $X \implies Y$ (суперпозицию $\overline{X} \vee Y$ дизъюнкции $X \vee Y$ с отрицанием $\overline{X}$ и булевой переменной Y) и эквивалентность $X \iff Y$ (суперпозицию $(X \implies Y) \wedge (Y \implies X)$ конъюнкции $X \wedge Y$ с импликациями $X \implies Y$ и $Y \implies X$).

Операции «$\vee$», «$\wedge$», «$-$» в алгебре {И,Л} порождают аналогичные операции (определяемые поточечно) во множестве $\mathbf{A}$ всех булевых функций. При этом $\mathbf{A}$ становится алгеброй Буля с единицей И и нулевым элементом Л.

1.3 Полукольца, кольца, подалгебры

Выберем произвольную σ–алгебру Буля $\mathbf{A}$ и договоримся называть ее *универсальной.* Введение этого термина связано с тем, что в дальнейшем мы будем рассматривать различные системы объектов алгебры $\mathbf{A}$, которые в свою очередь, могут быть алгебрами Буля и даже σ–алгебрами Буля. Основной интерес для нас будут представлять системы, удовлетворяющие (по отношению к операциям в универсальной алгебре) определенным условиям замкнутости.

1.3.1. Кольца. Элемент E называется единицей непустой системы S

объектов универсальной алгебры $\mathbf{A}$, если $E \in S$ и для любого $A \in S$ имеет место хотя бы одно из равенств $A + E = E$ или $AE = A$. Последние равенства, в свою очередь, означают, что $A \leq E$, то есть E — наибольший элемент в S. Отметим, что равенство $S = \mathbf{A}$ влечет равенство $E = 1$.

Непустая совокупность R объектов универсальной алгебры $\mathbf{A}$ называется (булевым) *кольцом*, если она обладает тем свойством, что из включений $A \in R$ и $B \in R$ следуют включения $A\Delta B \in R$ и $AB \in R$.

Пусть $R \subseteq \mathbf{A}$ — кольцо. Так как для любых A и B из $\mathbf{A}$ выполняются соотношения

$$A + B = (A\Delta B)\Delta(AB), \ A - B = A\Delta(AB)$$

(см. (1), (2)), то из включений $A \in R$ и $B \in R$ вытекает принадлежность к R суммы $A + B$ и разности $A - B$. Таким образом, кольцо — система объектов универсальной алгебры $\mathbf{A}$, замкнутая по отношению к сложению, умножению, вычитанию и образованию симметрической разности. Кроме того, любое кольцо содержит 0, так как всегда $A - A = 0 \in R$. Система R, состоящая из одного 0, представляет собой «наименьшее» возможное кольцо.

Кольцо с единицей E называется (булевой) *алгеброй*. Ясно, что всякая алгебра $R \subseteq \mathbf{A}$ является алгеброй Буля с нулевым элементом 0, с единицей E и с дополнением $\overline{A} := E - A$.

Пример 1 Для любого объекта $A \in \mathbf{A}$ система объектов

$$\beta(A) = \{B \in \mathbf{A} : B \leq A\}$$

представляет собой алгебру с единицей A. Действительно, если $B \leq A$ и $C \leq A$, то $AB = BA = A$, то есть A — единица системы $\beta(A)$. С другой стороны, по определению симметрической разности имеем

$$(B\Delta C)A = (B\overline{C} + C\overline{B})A,$$

значит,

$$(B\Delta C)A = (BA)\overline{C} + (CA)\overline{B} = B\overline{C} + C\overline{B} = B\Delta C$$

и при этом

$$(BC)A = B(CA) = BC.$$

Это означает, что $B\Delta C \leq A$ и $BC \leq A$. Следовательно, система $\beta(A)$ замкнута относительно умножения и образования симметрической разности. Таким образом $\beta(A)$ — кольцо с единицей, то есть алгебра.

Пример 2 Система всех конечных подмножеств произвольного множества A представляет собой кольцо в алгебре Буля $\beta(A)$ всех подмножеств множества A. Это кольцо будет алгеброй (и даже σ-алгеброй Буля) тогда и только тогда, когда множество A само конечно.

Пример 3 Система всех ограниченных множеств в $\mathbf{R}^n$ является кольцом в алгебре Буля $\beta(\mathbf{R}^n)$.

Из определения кольца непосредственно вытекает следующее предложение.

Предложение 6 *Пересечение*

$$R = \bigcap\nolimits_{\sigma \in \Sigma} R_\sigma$$

любого множества колец $\{R_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ *есть кольцо.*

Установим следующий простой, но важный для дальнейшего факт.

Предложение 7 *Для любой непустой системы S объектов универсальной алгебры $\mathbf{A}$ существует одно и только одно кольцо $R(S) \subseteq \mathbf{A}$, содержащее S и содержащееся в любом кольце $R \subseteq \mathbf{A}$, содержащем систему S.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Кольцо $R(S)$ определяется системой S однозначно. Для доказательства его существования рассмотрим сумму

$$X = \sum_{A \in S} A$$

всех объектов A, входящих в S, и алгебру $\beta(X) \subseteq \mathbf{A}$. Пусть $\{R_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ — совокупность всех колец, содержащихся в $\beta(X)$ и содержащих все объекты системы S. Пересечение

$$R = \bigcap\nolimits_{\sigma \in \Sigma} R_\sigma \in \beta(X)$$

всех этих колец и будет искомым кольцом $R(S)$. Действительно, каково бы ни было кольцо $R' \subseteq \mathbf{A}$, содержащее все объекты системы S, пересечение $R' \cap R \in \beta(X)$ будет кольцом из $\{R_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ и, следовательно, $S \subseteq R \subseteq R' \cap R \subseteq R'$, то есть R удовлетворяет условию минимальности. ■

Кольцо $R(S)$ называется *минимальным* кольцом над S или кольцом, *порожденным* системой S.

1.3.2. Полукольца. Два объекта A и B из универсальной алгебры $\mathbf{A}$ называются *дизъюнктными*, если $AB = 0$. Система элементов S называется *дизъюнктной*, если любые два элемента из S дизъюнктны.

Система $S \subseteq \mathbf{A}$ называется *полукольцом*, если она содержит 0, замкнута по отношению к умножению и обладает тем свойством, что из принадлежности к S элементов A и $A_1 \leq A$ вытекает возможность представления A в виде суммы $A = A_1 + ... + A_n$, где $\{A_1, ..., A_n\}$ — конечная дизъюнктная система элементов из S, первый из которых совпадает с A_1.

В дальнейшем всякую (конечную) дизъюнктную систему элементов $S \subseteq \mathbf{A}$, сумма которых совпадает с $A \in \mathbf{A}$, будем называть (конечным) *разложением* элемента A по элементам из S.

Всякое кольцо $R \subseteq \mathbf{A}$ является полукольцом, так как если A и $A_1 \leq A$ входят в R, то имеет место разложение

$$A = A_1 + A_2,$$

где $A_2 := A - A_1 \in R$. Действительно, по следствию 6 определения алгебры Буля $A_1 + A\overline{A_1} = A + A_1$. Значит,

$$A_1 + A_2 = A_1 + (A - A_1) = A_1 + A\overline{A_1} = A + A_1 = A.$$

Примером полукольца, не являющегося кольцом может служить совокупность элементов алгебры Буля $\beta(\mathbf{R}^n)$, состоящая из всех ограниченных промежутков в $\mathbf{R}^n$ (*промежутками* в $\mathbf{R}^n$, $n > 1$, называются: пустое множество, одноточечные множества и декартовы произведения $J_1 \times ... \times J_n$, где $J_1, ..., J_n$ — промежутки в $\mathbf{R}$).

Установим следующие свойства полуколец.

Свойство 1 *Пусть S — полукольцо в $\mathbf{A}$ и $A \in S$. Тогда любую конечную дизъюнктную систему $\{A_1, ..., A_n\}$ элементов из S, каждый из которых не превосходят A можно дополнить элементами $A_{n+1}, ..., A_m \in S$ до конечного разложения $A = A_1 + ... + A_m$ множества A.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся методом математической индукции. Для $n = 1$ справедливость утверждения вытекает из определения полукольца. Предположим, что свойство справедливо для $n = m$ и докажем его справедливость для $n = m + 1$. Рассмотрим произвольную дизъюнктную совокупность $A_1, ..., A_m, A_{m+1} \in S$, удовлетворяющую условиям: $A_1 \leq A, ..., A_m \leq A, A_{m+1} \leq A$. По предположению индукции

$$A = A_1 + ... + A_m + B_1 + ... + B_p,$$

где $B_i \in S$, $i \in \{1, ..., p\}$. Положим $B_{i1} = A_{m+1}B_i$, $i \in \{1, ..., p\}$. Согласно определению полукольца, найдется разложение $B_i = B_{i,1} + ... + B_{i,q(i)}$, где $B_{i,j} \in S$, $i \in \{1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., q(i)\}$. Значит,

$$A = A_1 + ... + A_m + \sum_{j=1}^{q(1)} B_{1,j} + ... + \sum_{j=1}^{q(p)} B_{p,j},$$

Легко увидеть, что $A_{m+1} \leq A - (A_1 + ... + A_m) \leq B_1 + ... + B_p$, значит,

$$A_{m+1} = A_{m+1}B_1 + ... + A_{m+1}B_p = B_{1,1} + ... + B_{p,1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$A = A_1 + ... + A_m + A_{m+1} + \sum_{j=2}^{q(1)} B_{1,j} + ... + \sum_{j=2}^{q(p)} B_{p,j},$$

Таким образом, свойство доказано. ■

Свойство 2 *Какова бы ни была конечная совокупность объектов $\{A_1, ..., A_n\}$ из полукольца S, в S найдется такая конечная дизъюнктная совокупность объектов $\{B_1, ..., B_p\}$, что каждое A_k допускает конечное разложение по объектам из $\{B_1, ..., B_p\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что свойство справедливо для $n = m$ (для $n = 1$ оно очевидно справедливо) и рассмотрим в S некоторую совокупность объектов $\{A_1, ..., A_m, A_{m+1}\}$. Пусть $\{B_1, ..., B_p\}$ — совокупность всех объектов из S, по отношению к которой выполняется предположение индукции: объекты из системы $\{A_1, ..., A_m\}$ допускают конечные разложения по объектам из совокупности $\{B_1, ..., B_p\}$. Положим $B_{i1} = A_{m+1}B_i$. В силу предыдущего свойства имеет место разложение

$$A_{m+1} = \sum_{i=1}^{p} B_{i,1} + ... + \sum_{j=1}^{q} B'_j,\ B'_j \in S.$$

С другой стороны, по определению полукольца

$$B_i = B_{i,1} + ... + B_{i,r(i)},\ B_{i,s} \in S.$$

Следовательно, объекты из $\{A_1, ..., A_m, A_{m+1}\}$ допускают конечные разложения по элементам из дизъюнктной совокупности

$$\{B_{i,s}, B'_j : i = 1, ..., p,\ s = 1, ..., r(i),\ j = 1, ..., q\}.$$

Свойство доказано. ■

1.3.3. Кольцо, порождаемое полукольцом. В том случае, когда S — полукольцо несложно вскрыть строение кольца $R(S)$, порождаемого этим полукольцом.

Предложение 8 *Если S — полукольцо, то $R(S)$ совпадает с системой J объектов из $\mathbf{A}$, допускающих конечные разложения*

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

по объектам A_i из S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что система J образует кольцо. Если A и B — два произвольных объекта из J, то имеют место разложения

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ B = \sum_{j=1}^{m} B_j,\ A_i, B_j \in S.$$

Так как S — полукольцо, то произведения

$$C_{i,j} := A_i B_j$$

входят в S. В силу свойства 1 имеют место разложения

$$A_i = \sum_{j=1}^{m} C_{i,j} + \sum_{k=1}^{p(i)} D_{i,k},\ B_j = \sum_{i=1}^{n} C_{i,j} + \sum_{l=1}^{q(j)} E_{i,l}.$$

где $D_{i,k}$ и $E_{i,l}$ принадлежат S. При этом

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p(i)} D_{i,k},$$

$$B = \sum_{j=1}^{m} B_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} C_{i,j} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{q(j)} E_{i,l}.$$

Из последних равенств вытекает, что произведение AB и симметрическая разность $A \Delta B$ допускают разложения:

$$AB = \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} B_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_i B_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{i,j},$$

$$A \Delta B = (A - AB) + (B - AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{p(i)} D_{i,k} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{q(j)} E_{i,l}$$

и, следовательно, входят в J. Таким образом, J действительно представляет собой кольцо. Его минимальность среди всех колец, содержащих S очевидна. ■

1.4 Меры

1.4.1. Определение меры. Действительная функция $m(A)$, определенная на элементах универсальной булевой алгебры $\mathbf{A}$ называется *мерой*, если она удовлетворяет условиям:

1) область определения S_m функции $m(A)$ является полукольцом;

2) значения функции $m(A)$ неотрицательны;

3) функция $m(A)$ *аддитивна*, то есть для любого конечного разложения

$$A = A_1 + ... + A_n$$

объекта $A \in S_m$ в сумму дизъюнктных объектов $A_1, ..., A_n$ из полукольца S_m выполнено равенство

$$m(A) = m(A_1) + ... + m(A_n).$$

Из очевидного равенства $0 = 0 + 0$ вытекает, что $m(0) = m(0) + m(0) = 2m(0)$. Отсюда вытекает, что $m(0) = 0$.

1.4.2. Продолжение меры с полукольца на порожденное им кольцо. Мера m' называется продолжением меры m, если $S_m \subseteq S_{m'}$ и для каждого $A \in S_m$ имеет место равенство $m'(A) = m(A)$.

Предложение 9 *Для каждой меры m, заданной на некотором полукольце $S_m \subseteq \mathbf{A}$, существует одно и только одно продолжение m', имеющее своей областью определения кольцо $R(S_m)$.*

Доказательство. Для каждого $A \in R(S_m)$ существует разложение

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k,$$

где $A_k \in S_m$ и $A_k A_j = 0$ при $k \neq j$. Положим по определению

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

Легко видеть, что величина $m'(A)$ не зависит от выбора разложения A. Действительно, если

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{j=1}^{p} B_j, \;\; B_j \in S_m,$$

то

$$A_k = A_k A = A_k \sum_{j=1}^{p} B_j = \sum_{j=1}^{p} A_k B_j$$

$$B_j = B_j A = B_j \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} B_j A_k$$

и в силу аддитивности меры m

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} m(A_k B_j) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} m(B_j A_k) = \sum_{j=1}^{p} m(B_j).$$

Неотрицательность и аддитивность функции m' очевидны. Итак, существование продолжения m' меры m на кольцо $R(S_m)$ доказано. Для доказательства его единственности заметим, что для любого продолжения m'' меры m на кольцо $R(S_m)$ выполнены равенства

$$m''(A) = \sum_{k=1}^{n} m''(A_k) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) = m'(A),$$

то есть мера m'' совпадает с мерой m'. Предложение доказано. ■

1.4.3. Свойства мер. Пусть m — мера, заданная на полукольце S_m; $A, A_1, ..., A_n$ — конечная система объектов из S_m. Используя продолжение m' меры m на кольцо $R(S_m)$, просто убедиться в справедливости следующих свойств меры m.

Свойство 3 *Если система $A_1, ..., A_n$ является дизъюнктной и*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \leq A,$$

то

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq m(A).$$

Доказательство. В силу аддитивности меры m' и очевидного соотношения

$$A = \sum_{k=1}^{n} A_k + \left(A - \sum_{k=1}^{n} A_k \right)$$

верно равенство

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m'(A_k) + m' \left(A - \sum_{k=1}^{n} A_k \right).$$

Так как

$$m' \left(A - \sum_{k=1}^{n} A_k \right) \geq 0,$$

то

$$m'(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m'(A_k).$$

Осталось заметить, что $m'(A) = m(A)$ и $m'(A_k) = m(A_k)$. ■

Свойство 4 *Если*

$$A \leq \sum_{k=1}^{n} A_k,$$

то

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k).$$

Доказательство. По следствию 6 определения алгебры Буля для любых A_1 и A_2 из S_m выполняется соотношение

$$A_1 + A_2 = A_1 + \overline{A_1} A_2.$$

При этом $A_1(\overline{A_1}A_2) = (A_1\overline{A_1})A_2 = 0$, то есть объекты A_1 и $\overline{A_1}A_2$ являются дизъюнктными. В силу аддитивности меры m' имеем

$$m'(A_1 + A_2) = m'(A_1) + m'(\overline{A_1}A_2).$$

С другой стороны, $A_2 + \overline{A_1}A_2 = A_2$, значит, $\overline{A_1}A_2 \le A_2$. Из свойства 3 вытекает, что $m'(\overline{A_1}A_2) \le m'(A_2)$. Следовательно, $m'(A_1 + A_2) \le m'(A_1) + m'(A_2)$. Отсюда по индукции получаем

$$m'\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} m'(A_k).$$

Наконец, из неравенства $A \le \sum_{k=1}^{n} A_k$ по свойству 3 вытекает, что

$$m'(A) \le m'\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} m'(A_k).$$

Осталось воспользоваться равенствами $m'(A) = m(A)$ и $m'(A_k) = m(A_k)$. Свойство доказано. ■

Свойство 5 *Если область определения S_m меры m есть кольцо, то для любых A и B из S_m выполняется соотношение*

$$m(A + B) = m(A) + m(B) - m(AB).$$

Доказательство. Из следствия 6 определения алгебры Буля вытекает, что

$$A + B = A + (B - A).$$

При этом $A(B - A) = (A\overline{A})B = 0$, значит,

$$m(A + B) = m(A) + m(B - A).$$

С другой стороны, $(B - A) + AB = \overline{A}B + AB = B$ и $(B - A)AB = B\overline{A}AB = 0$, значит,

$$m(B - A) + m(AB) = m(B).$$

Свойство доказано. ■

1.4.4. σ-аддитивность. Мера m называется *σ-аддитивной*, если для любой счетной дизъюнктной системы $\{A_k : k \in \mathbf{N}\}$ элементов из ее области определения S_m, удовлетворяющей условию

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \in S_m,$$

имеет место равенство

$$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Предложение 10 *Если мера m, определенная на некотором полукольце S_m, σ-аддитивна, то и мера m', получающаяся ее продолжением на кольцо $R(S_m)$, σ-аддитивна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A, A_k \in R(S_m)$, $k = 1, 2, ...$,

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

причем система $\{A_k : k \in \mathbf{N}\}$ — дизъюнктная. Тогда существуют такие B_j и $B_{k,j}$ из S_m, что

$$A = \sum_i B_i,\ A_k = \sum_j B_{k,j},\ k = 1, 2, ...,$$

причем объекты в правых частях каждого из этих равенств попарно дизъюнктны, а суммы по i и j конечны. Пусть $C_{i,k,j} = B_i B_{k,j}$. Легко видеть, что система $\{C_{i,k,j}\}$ дизъюнктна и имеют место конечные разложения:

$$B_i = B_i A = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j B_i B_{k,j} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j C_{i,k,j},$$

$$B_{k,j} = B_{k,j} A = \sum_i B_{k,j} B_i = \sum_i C_{i,k,j}.$$

Поэтому в силу σ-аддитивности меры m на S_m имеем

$$m(B_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j m(C_{i,k,j}),\ m(B_{k,j}) = \sum_i m(C_{i,k,j}),$$

а в силу определения меры m'

$$m'(A) = \sum_i m(B_i),\ m'(A_k) = \sum_j m(B_{k,j})$$

Отсюда вытекает, что

$$m'(A)=\sum_i m(B_i)=\sum_i\sum_{k=1}^{\infty}\sum_j m(C_{i,k,j})=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_j\sum_i m(C_{i,k,j})=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_j m(B_{k,j})=\sum_{k=1}^{\infty}m'(A_k).$$

Предложение доказано. ■

Свойства 3 и 4 могут быть обобщены на счетные суммы. Пусть m — σ-аддитивная мера на полукольце S_m, $\{A, A_1, A_2, ...\}$ — счетная система объектов из S_m.

Свойство 6 *Если система* $\{A_1, A_2, ...\}$ *является дизъюнктной и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \leq A,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq m(A).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} A_k \leq A$$

для любого натурального n (убедитесь в этом самостоятельно), то по свойству 3 меры m справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq m(A).$$

Остается перейти к пределу при $n \to \infty$. ■

Лемма 1 *Если*

$$A \leq \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

то для любого натурального n *выполняются неравенства*

$$A \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_n\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам достаточно показать, что для любого натурального p выполняется неравенство

$$A_p \leq \sum_{k=1}^{p} \left(A_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_n \right),$$

которое при $p = 1$ вырождается в очевидное неравенство $A_1 \leq A_1$. Воспользуемся методом математической индукции. При $p = 1$ доказываемое неравенство выполнено. Предположим, что для любого натурального $q \leq p$ выполнено неравенство

$$A_q \leq \sum_{k=1}^{p} \left(A_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_n \right).$$

Тогда для любого натурального $q \leq p$

$$A_q \leq \sum_{k=1}^{p} \left(A_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_n \right) \leq \sum_{k=1}^{p+1} \left(A_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_n \right),$$

а при $q = p + 1$ имеем

$$A_{p+1} \leq \sum_{n=1}^{p} A_n + \left(A_{p+1} - \sum_{n=1}^{p} A_n \right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{p} \left(A_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_n \right) + \left(A_{p+1} - \sum_{n=1}^{p} A_n \right) = \sum_{k=1}^{p+1} \left(A_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_n \right).$$

■

Свойство 7 *Если*

$$A \leq \sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

то

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $R(S_m)$ — кольцо, то объекты

$$B_1 := A_1 A,\ B_k := A_k A - \sum_{n=1}^{k-1} A_k A,\ k = 2, 3, ...$$

принадлежат $R(S_m)$. С другой стороны, для $k < l$ имеем

$$B_k B_l = \left(A_k A - \sum_{n=1}^{k-1} A_n A \right) \left(A_l A - \sum_{n=1}^{l-1} A_n A \right) =$$

$$= A \left(A_k \prod_{n=1}^{k-1} \overline{A_n} \right) \left(A_l \prod_{n=1}^{l-1} \overline{A_n} \right) = A(A_k \overline{A_k}) A_l \prod_{n=1}^{l-1} \overline{A_n} = 0.$$

Следовательно, система $\{B_1,\ B_k : k = 2, 3, ...\}$ является дизъюнктной. При этом по доказанной лемме

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k = A \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k - \sum_{n=1}^{k-1} A_n \right) = A.$$

Значит,

$$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k).$$

Свойство доказано. ■

2 Меры в $\mathbf{R}^n$

2.1 Мера элементарных множеств

2.1.1. Промежутки. *Промежутками* в $\mathbf{R}$ будем называть: пустое множество, одноточечные множества, интервалы, полуинтервалы и отрезки. *Промежутками* в $\mathbf{R}^n$, $n > 1$ — всевозможные декартовы произведения вида $i_1 \times ... \times i_n$, где $i_1, ..., i_n$ — промежутки в $\mathbf{R}$. При этом, если хотя бы один из промежутков $i_1, ..., i_n$ совпадает с $\emptyset$, то по определению $I = \emptyset$.

Для каждого $N \in \mathbf{N}$ обозначим: e_N — промежуток $\{x : |x| \leq N\}$ в $\mathbf{R}$; E_N — промежуток $e_N \times ... \times e_N$ в $\mathbf{R}^n$; $\beta(E_N)$ — алгебра Буля всех подмножеств промежутка E_N; S_N — совокупность всех промежутков, лежащих в $\beta(E_N)$.

Предложение 11 *Совокупность* S_N *образует полукольцо в алгебре Буля* $\beta(E_N)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство. Пусть $I := i_1 \times ... \times i_n$ и $I' := i'_1 \times ... \times i'_n$ — два промежутка из S_N. Тогда

$$I \cap I' = (i_1 \cap i'_1) \times ... \times (i_n \cap i'_n)$$

— промежуток из S_N. Следовательно, совокупность S_N замкнута относительно образования пересечений. Предположим теперь, что $I \subseteq I'$ и $I \neq \emptyset$. Тогда промежуток I'_k распадается в дизъюнктное объединение трех промежутков: $i'_{k,0}, i'_{k,1} = i_k, i'_{k,2}$ (один или два из которых, могут оказаться пустыми). Таким образом, промежуток I' распадается в дизъюнктное объединение промежутков

$$I'_{s,...,t} := i'_{1,s} \times ... \times i'_{n,t}, \;\; s, ..., t \in \{0, 1, 2\},$$

среди которых лишь один совпадает с I. ■

2.1.2 Мера на σ_N. Для каждого из промежутков $I \in S_N$ естественным образом определяется его *мера* $m(I)$ (*длина*, если $n = 1$; *площадь*, если $n = 2$; *объем*, если $n = 3$):

a) если $I = \emptyset$, то $m(I) = 0$;

b) если $I := i_1 \times ... \times i_n$ и $i_k = \langle a_k, b_k \rangle$, то

$$m(I) = (b_1 - a_1) \times ... \times (b_n - a_n).$$

При этом выполнены следующие условия:

1) функция $m(I)$ определена на полукольце S_N и принимает действительные неотрицательные значения;

2) функция $m(I)$ аддитивна, то есть, если

$$I = \coprod_{k=1}^{N} I_k$$

(знак $\coprod$ означает дизъюнктное объединение, то есть объединение попарно не пересекающихся множеств), то

$$m(I) = \sum_{k=1}^{N} m(I_k).$$

Таким образом, определенная нами функция множества, является мерой в булевой алгебре $\beta(E_N)$ и для нее справедливы утверждения из раздела 1.4. В частности, мера $m(I)$ допускает однозначное продолжение m' на минимальное кольцо $R(S_n)$, содержащее S_N.

2.1.3. Свойства $m(I)$. Рассмотрим основные свойства меры $m(I)$.

Свойство 8 *Если I — промежуток из S_N и $\{I_k\}$ — конечная или счетная совокупность промежутков из S_N такая, что*

$$I \subseteq \bigcup_k I_k,$$

то

$$m(I) \leq \sum_k m(I_k).$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ и данного I, очевидно, можно найти замкнутый промежуток I', который содержится в I и удовлетворяет условию

$$m(I') \geq m(I) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, для каждого I_k можно найти открытый промежуток I'_k, содержащий I_k и удовлетворяющий условию

$$m(I'_k) \leq m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Ясно, что

$$I' \subseteq \bigcup_k I'_k.$$

Из совокупности $\{I'_k\}$ можно (по лемме Гейне-Бореля) выбрать конечную подсовокупность $I'_{k_1}, ..., I'_{k_s}$, покрывающую I'. При этом по свойству 4 из раздела 1.4 выполняется неравенство

$$m(I') \leq \sum_{j=1}^{s} m(I'_{k_j}).$$

Поэтому

$$m(I) \leq m(I') + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{j=1}^{s} m(I'_{k_j}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{s} m(I_{k_j}) + \sum_{j=1}^{s} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{k} m(I_k) + \varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ доказываемое неравенство выполнено. ■

Мера $m(I)$ оказывается σ-аддитивной, точнее

Свойство 9 *Если I — промежуток из S_N и $\{I_k\}$ — конечная или счетная совокупность промежутков из S_N такая, что*

$$I = \coprod_{k} I_k$$

то

$$m(I) = \sum_{k} m(I_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу аддитивности меры $m(I)$ при любом натуральном N имеем

$$m(I) \geq m\left(\coprod_{k=1}^{N} I_k\right) = \sum_{k=1}^{N} m(I_k).$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$, получаем

$$m(I) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = \sum_{k} m(I_k).$$

В силу предыдущего свойства имеет место и противоположное неравенство. Таким образом, σ-аддитивность меры $m(I)$ доказана. ■

2.1.4. Элементарные множества. Элемент из $\beta(E_N)$ будем называть *элементарным*, если он представляется хотя бы одним способом как дизъюнктное объединение промежутков. Из предложения 1.8 вытекает, что совокупность всех элементарных множеств в $\beta(E_N)$ образует кольцо и совпадает с $R(S_N)$. Более того, в силу предложения 1.9, продолжение m' меры $m(I)$ на кольцо элементарных множеств определяется следующим образом:

$$\text{если } A = \sum_{k=1}^{N} I_k, \text{ то } m'(A) = \sum_{k=1}^{N} m(I_k).$$

По свойству 9 меры m и предложению 1.10 мера m' является σ-аддитивной. Более того для нее справедливы следующие утверждения.

Свойство 10 *Если система элементарных множеств* $\{A_1, A_2, ...\}$ *является дизъюнктной и*

$$\coprod_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq A$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} m'(A_k) \leq m'(A).$$

Свойство 11 *Если*

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

то

$$m'(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m'(A_k).$$

Эти свойства являются прямыми следствиями свойств σ-аддитивных мер, рассмотренных нами в разделе 1.4.

2.2 Продолжение меры по Жордану

2.2.1. Внешняя и внутренняя меры Жордана. *Внешней* мерой Жордана множества $A \subseteq E_N$ называется действительное число

$$g^*(A) := \inf m'(B),$$

где точная нижняя грань берется по всем элементарным множествам B, удовлетворяющим условию $A \subseteq B \subseteq E_N$.

Если A — элементарное множество, то

$$g^*(A) = m'(A).$$

Действительно, $A \subseteq A \subseteq E_N$, следовательно, $g^*(A) \leq m'(A)$. С другой стороны, если $A \subseteq B \subseteq E_N$ и B — элементарное множество, то по свойству 10 выполняется неравенство $m'(A) \leq m'(B)$. Значит, $g^*(A) \geq m'(A)$, то есть выполняется и противоположное неравенство.

Внутренней мерой Жордана множества $A \subseteq E_N$ называется действительное число

$$g_*(A) := m(E_N) - g^*(E_N \setminus A) = (2N)^n - g^*(E_N \setminus A).$$

Если A — элементарное множество, то

$$g_*(A) = m'(A).$$

Действительно, так как $R(S_N)$ — кольцо, то $E_N \setminus A$ — элементарное множество, значит, $g^*(E_N \setminus A) = m'(E_N \setminus A)$, С другой стороны, $E_N = A \cup (E_N \setminus A)$. По свойству аддитивности $m(E_N) = m'(A) + m'(E_N \setminus A)$. Откуда вытекает, что $m(E_N) - m'(E_N \setminus A) = m(E_N) - g^*(E_N \setminus A) = g_*(A)$, то есть $g_*(A) = m'(A)$.

Внутреннюю меру Жордана можно определить следующим образом:

$$g_*(A) = \sup m'(C),$$

где точная верхняя грань берется по всем элементарным множествам C, удовлетворяющим условию $C \subseteq A$. Действительно, с одной стороны, по определению внешней меры Жордана $g^*(E_N \setminus A) \subseteq m'(E_N \setminus C)$, значит,

$$g_*(A) = m(E_N) - g^*(E_N \setminus A) \geq m(E_N) - m'(E_N \setminus C) = m'(C)$$

и $g_*(A) \geq \sup m'(C)$. С другой стороны, по определению точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарное множество $B \supseteq E_N \setminus A$ такое, что $m'(B) \leq g^*(E_N \setminus A) + \varepsilon$, следовательно,

$$g_*(A) = m(E_N) - g^*(E_N \setminus A) \leq$$

$$\leq m(E_N) - m'(B) - \varepsilon = m'(E_N \setminus B) - \varepsilon.$$

При этом $C := E_N \setminus B$ — элементарное множество, содержащееся в A. Следовательно, $g_*(A) \leq \sup m'(C) - \varepsilon$. Из произвольности выбора $\varepsilon > 0$ вытекает, что $g_*(A) \leq \sup m'(C)$. Таким образом, $g_*(A) = \sup m'(C)$.

2.2.2. Свойства внешней и внутренней мер Жордана. Прежде всего, отметим, что любой промежуток содержит $\emptyset$ в качестве своего подмножества, следовательно,

$$g^*(\emptyset) = g_*(\emptyset) = 0.$$

Предложение 12 *Если*

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} A_k,$$

где $A, A_k \subseteq E_N$, *то*

$$g^*(A) \leq \bigcup_{k=1}^{n} g^*(A_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого k найдется элементарное множество $B_k \supseteq A_k$ такое, что $m'(B_k) \leq g^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. При этом

$$A \subseteq B := \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

и B — элементарное множество. Значит,

$$g^*(A) \leq m'(B) \leq \sum_{k=1}^{n} m'(B_k) \leq \sum_{k=1}^{n} g^*(A_k) + \varepsilon.$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает доказываемое неравенство. ■

Предложение 13 *Если* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq E_N$, *то*

$$g_*(A_1) \leq g_*(A_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $A_1 \subseteq A_2 \subseteq E_N$, то $E_N \setminus A_2$ включается в $E_N \setminus A_1$. Отсюда вытекает, что $g^*(E_N \setminus A_2) \leq g^*(E_N \setminus A_1)$ и $-g^*(E_N \setminus A_1) \leq -g^*(E_N \setminus A_2)$. Значит, $m(E_N) - g^*(E_N \setminus A_1) \leq m(E_N) - g^*(E_N \setminus A_2)$ и $g_*(A_1) \leq g_*(A_2)$. ■

Предложение 14 *Для всякого множества* $A \in \beta(E_N)$

$$0 \leq g_*(A) \leq g^*(A) \leq (2N)^n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из включений $\emptyset \subseteq A \subseteq E_N$ вытекает, что $0 = g_*(\emptyset) \leq g_*(A)$ и $g^*(A) \leq g^*(E_N) = m(E_N) = (2N)^n$. С другой стороны, $E_N = A \cup (E_N \setminus A)$, значит, $m(E_N) = g^*(E_N) \leq g^*(A) + g^*(E_N \setminus A)$. Следовательно, $g^*(A) \leq m(E_N) - g^*(E_N \setminus A) = g_*(A)$. ■

2.2.3. Множества, измеримые по Жордану. Множество $A \subseteq E_N$ называется *измеримым* по Жордану, если $g^*(A) = g_*(A)$.

Если множество $A \subseteq E_N$ измеримо по Жордану, то его дополнение $E_N \setminus A$ измеримо по Жордану. Действительно, если A измеримо, то

$$g^*(A) = g_*(A) = m(E_N) - g^*(E_N \setminus A).$$

С другой стороны, $g_*(E_N \setminus A) = m(E_N) - g^*(A)$. Значит, $g_*(E_N \setminus A) = m(E_N) - m(E_N) + g^*(E_N \setminus A)$, то есть $g_*(E_N \setminus A) = g^*(E_N \setminus A)$ и при этом $g^*(A) + g^*(E_N \setminus A) = m(E_N)$.

Предложение 15 (критерий измеримости). *Для того чтобы множество $A \subseteq E_N$ было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы его граница ∂A удовлетворяла условию*

$$g^*(\partial A) = 0.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A — измеримо по Жордану. Тогда $E_N \setminus A$ – измеримо по Жордану. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся элементарные множества $B \supseteq A$ и $C \supseteq E_N \setminus A$ такие, что

$$m'(B) \leq g^*(A) + \frac{\varepsilon}{2},\ m'(C) \leq g^*(E_N \setminus A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$m'(B) + m'(C) \leq m'(E_N) + \varepsilon.$$

С другой стороны, $\partial A \subseteq B \cap C$ и $g^*(\partial A) \leq m'(B \cap C)$. Учитывая, что $m(E_N) = m'(B) + m'(C) - m'(B \cap C)$, получаем $g^*(\partial A) \leq m'(B) + m'(C) - m(E_N) \leq \varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольным образом, то $g^*(\partial A) = 0$.

Достаточность. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарное множество $B \supseteq \partial A$ такое, что $m'(B) \leq \varepsilon$. Пусть $A_1 = A \setminus B$. Просто убедиться, что $\overline{A_1} \subseteq \operatorname{int} A$. По лемме Гейне-Бореля найдется элементарное множество B_1 такое, что $A_1 \subseteq \overline{A_1} \subseteq B_1 \subseteq A$. Следовательно, для симметрической разности $A \Delta B_1$ имеем $A \Delta B_1 \subseteq A \setminus B_1 \subseteq A \setminus A_1 \subseteq B$. Значит, $g^*(A \Delta B_1) \leq \varepsilon$. С другой стороны,

$$A \subseteq B_1 \cup (A \Delta B_1),\ E_N \setminus A \subseteq (E_N \setminus B_1) \cup (A \Delta B_1).$$

Отсюда вытекает, что

$$g^*(A) \leq g^*(B_1) + \varepsilon,\ g^*(E_N \setminus A) \leq g^*(E_N \setminus B_1) + \varepsilon.$$

И, наконец,

$$g^*(A) = m(E_N) - g^*(E_N \setminus A) \geq m(E_N) - g^*(E_N \setminus B_1) - \varepsilon =$$

$$= g_*(B_1) - \varepsilon = g^*(B_1) + \varepsilon - 2\varepsilon \geq g^*(A) - 2\varepsilon.$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает, что $g_*(A) \geq g^*(A)$. Обратное неравенство выполняется в силу свойств внешней и внутренней мер. ■

Замечание 1 Так как $0 \leq g_*(\partial A) \leq g^*(\partial A)$, то условие $g^*(\partial A) = 0$ означает, что $g_*(\partial A) = g^*(\partial A) = 0$, то есть множество ∂A — измеримо по Жордану и имеет меру нуль.

2.2.4. Мера Жордана. Пусть $A, B \subseteq E_N$ — измеримы по Жордану. Значит, $E_N \setminus A, E_N \setminus B$ — измеримы по Жордану. Более того, $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$, следовательно, $0 \leq g^*(\partial(A \cup B)) \leq g^*(\partial A) + g^*(\partial B) = 0$. То есть множество $A \cup B$ — измеримо по Жордану. В свою очередь, из определения булевых операций $A \setminus B$, $A \Delta B$ вытекает, что

$$A \cap B = E_N \setminus [(E_N \setminus A) \cup (E_N \setminus B)],$$

$$A \setminus B = A \cap (E_N \setminus B),\ A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Значит, $A \cap B$, $A \setminus B$ и $A \Delta B$ измеримы по Жордану. Тем самым, мы доказали следующее предложение.

Предложение 16 *Совокупность $G(E_N) \subseteq \beta(E_N)$ измеримых по Жордану множеств образует кольцо.*

Сужение функции $g^*(A)$ на кольцо $G(E_N)$ называется *мерой Жордана* и обозначается символом $\mu_G(A)$. Убедимся, что функция $\mu_G(A)$ является аддитивной.

Предложение 17 *Если $A_1, ..., A_n \subseteq E_N$ — измеримы по Жордану и попарно не пересекаются, то для справедливо равенство*

$$\mu_G(A) = \sum_{k=1}^{n} \mu_G(A_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай двух множеств A_1 и A_2, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать элементарные множества B_1 и B_2, так чтобы

$$g^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon,\ g^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon.$$

Положим $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$. Тогда

$$B_1 \subseteq A_1 \cup (A_1 \Delta B_1),\ B_2 \subseteq A_2 \cup (A_2 \Delta B_2),\ B \subseteq A \cup (A \Delta B),$$

$$B_1 \cap B_2 \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2),\ A \Delta B \subseteq (A_1 \Delta B_1) \cap (A_2 \Delta B_2).$$

Следовательно,

$$m'(B_1) \leq g^*(A_1) + g^*(A_1 \Delta B_1) \leq g^*(A_1) + \varepsilon,$$

$$m'(B_2) \le g^*(A_2) + g^*(A_2\Delta B_2) \le g^*(A_2) + \varepsilon,$$
$$m'(B_1 \cap B_2) \le g^*(A_1\Delta B_1) + g^*(A_2\Delta B_2) \le 2\varepsilon,$$
$$g^*(A\Delta B) \le g^*(A_1\Delta B_1) + g^*(A_2\Delta B_2) \le 2\varepsilon,$$
$$g^*(B) \le g^*(A) + g^*(A\Delta B) \le g^*(A) + 2\varepsilon,$$

то есть $g^*(A) \le m'(B) - 2\varepsilon$. Далее,

$$g^*(A) \ge g^*(B) - 2\varepsilon = m'(B) - 2\varepsilon =$$

$$= m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) - 2\varepsilon \ge g^*(A_1) + g^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то

$$g^*(A) \ge g^*(A_1) + g^*(A_2).$$

Обратное неравенство выполняется в силу свойств внешней меры. ■

2.2.5. Счетная аддитивность меры Жордана. Свойство аддитивности меры Жордана распространяется и на измеримые по Жордану счетные дизъюнктные объединения, точнее, справедливо следующее предложение.

Предложение 18 *Если*

$$A = \coprod_{k=1}^{\infty} A_k$$

и A, A_k *— измеримы по Жордану, то*

$$\mu_G(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_G(A_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого натурального n имеем

$$\mu_G\left(\coprod_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu_G(A_k) \le \mu_G(A).$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$. Получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_G(A_k) \le \mu_G(A).$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся элементарные $B \subseteq A$, $B_k \subseteq A_k$, такие что:

$$\mu_G(A\Delta B) = \mu_G(A) - m'(B) \leq \varepsilon,$$
$$m'(B_k) \leq \mu_G(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Так как

$$B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k,$$

то в силу счетной полуаддитивности меры m'

$$m'(B) \leq \sum_{k=1}^{sI} m'(B_k).$$

Следовательно,

$$\mu_G(A) \leq m'(B) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} m'(B_k) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_G(A_k) + 2\varepsilon.$$

Из произвольности в выборе $\varepsilon > 0$ вытекает, что

$$\mu_G(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_G(A_k).$$

Последнее неравенство вместе с обратным неравенством дает равенство. Предложение доказано. ■

2.2.6. Непрерывность меры Жордана. Свойство непрерывности меры Жордана представляет собой основу для вычисления мер различных измеримых множеств. Метод, основанный на этом свойстве, широко используется даже в курсе геометрии средней школы.

Предложение 19 (непрерывность). *Если $E_N \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ — последовательность вложенных друг в друга измеримых по Жордану множеств и*

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

— измеримо по Жордану, то

$$\mu_G(A) = \lim_{k\to\infty} \mu_G(A_k) = \inf_k \mu_G(A_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $A = \emptyset$. Тогда

$$A_1 = \coprod_{k=1}^{\infty}(A_k \setminus A_{k+1}),\ A_k = \coprod_{n=k}^{\infty}(A_n \setminus A_{n+1}).$$

В силу счетной аддитивности меры Жордана имеем

$$\mu_G(A_1) = \sum_{k=1}^{sI} \mu_G(A_k \setminus A_{k+1}),\ \mu_G(A_k) = \sum_{n=k}^{\infty} \mu_G(A_n \setminus A_{n+1}),$$

где второй ряд является остатком первого. Так как первый ряд сходится, то $\mu_G(A_k) \to 0$, то есть

$$\lim_{k\to\infty} \mu_G(A_k) = \inf_k \mu_G(A_k) = 0,$$

что и требовалось доказать. Пусть теперь $A \neq \emptyset$. Заменим множества A_k множествами $A_k \setminus A = B_k$. Тогда $B_1 \supseteq B_2 \supseteq ...$ и

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset.$$

По предыдущему рассуждению имеем

$$\lim_{k\to\infty} \mu_G(B_k) = 0.$$

С другой стороны, $\mu_G(A_k) = \mu_G(B_k) + \mu_G(A)$, значит,

$$\lim_{k\to\infty} \mu_G(A_k) = \mu_G(A).$$

■

Следствие 7 *Если* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq E_N$, A_k *и*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty}$$

— измеримы по Жордану, то

$$\mu_G(A) = \lim_{k\to\infty} \mu_G(A_k) = \sup_k \mu_G(A_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение вытекает из соотношений

$$\mu_G(A) = m(E_N) - \mu_G(E_N \setminus A),$$

$$\mu_G(A_k) = m(E_N) - \mu_G(E_N \setminus A_k)$$

и включений

$$E_N \supseteq E_N \setminus A_1 \supseteq E_N \setminus A_2 \supseteq \ldots .$$

■

Упражнение 13 *Пусть* $A \subseteq E_N$ *— измеримо по Жордану,* $\operatorname{int} A$ *— внутренность* A*,* $\overline{A}$ *— его замыкание. Докажите, что множества* $\operatorname{int} A$ *и* $\overline{A}$ *измеримы по Жордану и*

$$\mu_G(A) = \mu_G(\operatorname{int} A) = \mu_G(\overline{A}).$$

2.3 Продолжение меры по Лебегу

2.3.1. Внешняя и внутренняя меры Лебега. *Внешней* мерой Лебега множества $A \subseteq E_N$ называется действительное число

$$l^*(A) = \inf \sum_k m(I_k),$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A конечным или счетным совокупностям $\{I_k\}$ промежутков.

Если A — элементарное множество, то $l^*(A) = m'(A)$. Действительно, если

$$A = \coprod_{k=1}^{n} I_k,$$

то

$$m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(I_k)$$

и $l^*(A) \leq m'(A)$. С другой стороны, для любого покрытия $\{I_k\}$ множества A промежутками, в силу счетной полуаддитивности меры m', выполняется неравенство

$$m'(A) \leq \sum_k m(I_k).$$

Следовательно, $l^*(A) \geq m'(A)$.

Внутренней мерой Лебега множества $A \subseteq E_N$ называется действительное число

$$l_*(A) = m'(E_N) - I^*(E_N \setminus A) = (2N)^n - I^*(E_N \setminus A).$$

Если A — элементарное множество, то $l_*(A) = m'(A)$. Действительно, так как $R(S_N)$ — кольцо, то $E_N \setminus A$ — элементарное множество, значит, $I^*(E_N \setminus A) = m'(E_N \setminus A)$. С другой стороны, $E_N = A \cup (E_N \setminus A)$. В силу аддитивности $m(E_N) = m'(A) + m'(E_N \setminus A)$. Откуда вытекает, что

$$m(E_N) - m'(E_N \setminus A) = m(E_N) - l^*(E_N \setminus A) = l_*(A),$$

то есть $l_*(A) = m'(A)$.

2.3.2. Свойства внешней и внутренней мер Лебега. Прежде всего отметим, что любой промежуток содержит $\emptyset$ в качестве своего подмножества, следовательно,

$$l^*(\emptyset) = l_*(\emptyset) = 0.$$

Предложение 20 (счетная полуаддитивность). *Если*

$$A \subseteq \bigcup_k A_k,$$

где $A, A_k \subseteq E_N$, $k = 1, 2, ...,$ *то*

$$l^*(A) \leq \sum_k l^*(A_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого k найдется система $\{I_{k,i}\}$ промежутков, покрывающая A_k, такая, что

$$\sum_i m(I_{k,i}) < l^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Тогда

$$A \subseteq \bigcup_k \bigcup_i I_{k,i}$$

и

$$l^*(A) \leq \sum_k \sum_i m(I_{k,i}) \leq$$

$$\leq \sum_k \left(l^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \leq \sum_k l^*(A_k) + \varepsilon.$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает доказываемое неравенство. ■

Предложение 21 *Если* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq E_N$, *то*

$$l^*(A_1) \le l^*(A_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $A_1 \subseteq A_2 \subseteq E_N$, то $E_N \setminus A2$ включается в $E_N \setminus A_1$. Отсюда вытекает, что

$$-l^*(E_N \setminus A_1) \le -l^*(E_N \setminus A_2).$$

Значит,

$$m(E_N) - l^*(E_N \setminus A_1) \le m(E_N) - l^*(E_N \setminus A_2)$$

и $l^*(A_1) \le l^*(A_2)$. ■

Предложение 22 *Для всякого множества* $A \in \beta(E_N)$

$$0 \le l_*(A) \le l^*(A) \le (2N)^n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из включений $\emptyset \subseteq A \subseteq E_N$ вытекает, что $0 = l_*(\emptyset) \le l_*(A)$ и $l^*(A) \le l^*(E_N) = m(E_N) = (2N)^n$. С другой стороны, $E_N = A \cup (E_N \setminus A)$, значит,

$$m(E_N) = l^*(E_N) \le l^*(A) + l^*(E_N \setminus A).$$

Следовательно,

$$l^*(A) \ge m(E_N) - l^*(E_N \setminus A) = l_*(A).$$

■

2.3.3. Множества измеримые по Лебегу. Множество $A \subseteq E_N$ называется *измеримым* по Лебегу, если

$$l_*(A) = l^*(A).$$

Если множество $A \subseteq E_N$ измеримо по Лебегу, то его дополнение $E_N \setminus A$ измеримо по Лебегу. Действительно, если A измеримо по Лебегу, то $l^*(A) = l_*(A) = m(E_N) - l^*(E_N \setminus A)$. С другой стороны, $l_*(E_N \setminus A) = m(E_N) - l^*(A)$. Значит, $l_*(E_N \setminus A) = m(E_N) - m(E_N) + l^*(E_N \setminus A)$, то есть $l^*(E_N \setminus A) = l_*(E_N \setminus A)$ и при этом

$$l^*(A) + l^*(E_N \setminus A) = m(E_N).$$

Предложение 23 (критерий измеримости). *Для того чтобы множество $A \subseteq E_N$ было измеримо по Лебегу, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало элементарное множество $B \subseteq E_N$ такое, что*

$$l^*(A \Delta B) < \varepsilon.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A — измеримо по Лебегу. Тогда $E_N \setminus A$ — измеримо по Лебегу. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся системы промежутков $\{J_i\}$, $\{I_k\}$, покрывающие A и $E_N \setminus A$ соответственно, такие, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(J_i) \le l^*(A) + \varepsilon,\ \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \le l^*(E_N \setminus A) + \varepsilon.$$

Отсюда сразу вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(J_i) + \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \le l^*(A) + l^*(E_N \setminus A) + 2\varepsilon = m(E_N) + 2\varepsilon.$$

Выберем натуральное r из условия

$$\sum_{i=r}^{\infty} m(J_i) \le \varepsilon,\ \sum_{k=r}^{\infty} m(I_k) \le \varepsilon$$

и введем обозначения:

$$B := \bigcup_{i=1}^{r-1} J_i,\ C := \bigcup_{i=r}^{\infty} J_i,\ D := \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$$

$$B' := \bigcup_{k=1}^{r-1} I_k,\ C' := \bigcup_{k=r}^{\infty} I_k,\ D' := \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k.$$

При этом $l^*(C) \le \varepsilon$, $l^*(C') \le \varepsilon$ и выполняются следующие включения

$$D \cap D' \subseteq (B \cap B') \cup C \cup C',\ E_N \subseteq (B \cup B') \cup C \cup C',$$

из которых вытекает, что

$$l^*(D \cap D') \le m'(B \cap B') + l^*(C) + l^*(C'),$$

$$m(E_N) \le m'(B \cup B') + l^*(C) + l^*(C').$$

Значит, $m'(B \cup B') \ge m(E_N) - l^*(C) - l^*(C')$. Кроме того, так как B и B' — элементарные, то

$$m'(B \cap B') = m'(B) + m'(B') - m'(B \cup B').$$

Следовательно,

$$l^*(D \cap D') \le m'(B) + m'(B') - m(E_N) + 2l^*(C) + 2l^*(C') \le$$

$$\le \sum_{i=r}^{\infty} m(J_i) + \sum_{k=r}^{\infty} m(I_k) - m(E_N) + 2l^*(C) + 2l^*(C') \le$$

$$\le m(E_N) + 2\varepsilon - m(E_N) + 2\varepsilon + 2\varepsilon = 6\varepsilon.$$

Наконец, так как $A \setminus B \subseteq C$ и $B \setminus A \subseteq D \setminus A \subseteq D \cap D'$, то

$$l^*(A\Delta B) \le l^*(A \setminus B) + l^*(B \setminus A) \le l^*(C) + l^*(D \cap D\prime) \le 7\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольным образом, то необходимость доказана.

Достаточность. Пусть при некоторых $\varepsilon > 0$ и B из кольца $R(S_N)$ выполняется неравенство $l^*(A\Delta B) < \varepsilon$. Так как

$$A \subseteq B \cup (A\Delta B),\ E_N \setminus A \subseteq (E_N \setminus B) \cup (A\Delta B),$$

то $l^*(A) \le l^*(B) + \varepsilon$ и $l^*(E_N \setminus A) \le l^*(E_N \setminus B) + \varepsilon$. Следовательно,

$$l_*(A) = m(E_N) - l^*(E_N \setminus A) \ge m(E_N) - l^*(E_N \setminus B) - \varepsilon =$$

$$= l_*(B) - \varepsilon = l^*(B) + \varepsilon - 2\varepsilon \ge l^*(A) - 2\varepsilon.$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ вытекает, что $l^*(A) \ge l^*(A)$. Обратное неравенство выполняется в силу свойств внешней и внутренней мер. ∎

2.3.4. Мера Лебега. Пусть $A, B \subseteq E_N$ — измеримы по Лебегу. Значит, $E_N \setminus A$, $E_N \setminus B$ — измеримы по Лебегу. Согласно критерию измеримости для любого $\varepsilon > 0$ найдутся элементарные A_1 и B_1 такие, что $l^*(A\Delta A_1) \le \varepsilon$, $l^*(B\Delta B_1) \le \varepsilon$. Так как

$$(A \cup B)\Delta(A_1\Delta B_1) \subseteq (A\Delta A_1) \cup (B\Delta B_1),$$

то $l^*((A\cup B)\Delta(A_1\Delta B_1)) \le 2\varepsilon$. То есть множество $A\cup B$ измеримо по Лебегу. В свою очередь, из определений операций $A \setminus B$, $A\Delta B$ вытекает, что

$$A \cap B = E_N \setminus [(E_N \setminus A) \cup (E_N \setminus B)],$$

$$A \setminus B = A \cap (E_N \setminus B),\ A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Значит, и $A\cap B$, $A\setminus B$, $A\Delta B$ измеримы по Лебегу. Тем самым, мы доказали следующее предложение.

Предложение 24 *Совокупность $L(E_N) \subseteq \beta(E_N)$ измеримых по Лебегу множеств образует кольцо.*

Сужение функции $l^*(A)$ на кольцо $L(E_N)$ называется *мерой Лебега* и обозначается символом $\mu_L(A)$. Убедимся, что функция $\mu_L(A)$ является аддитивной.

Предложение 25 *Если $A_1, ..., A_r \subseteq E_N$ — измеримы по Лебегу и попарно не пересекаются, то для*

$$A = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$$

справедливо равенство

$$\mu_L(A) = \sum_{i=1}^{r} \mu_L(A_i).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай двух множеств A_1 и A_2, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Для $\varepsilon > 0$ выберем элементарные множества B_1 и B_2 так, чтобы выполнялись неравенства

$$l^*(A_1\Delta B_1) < \varepsilon,\ l^*(A_2\Delta B_2) < \varepsilon.$$

Положим, $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$. Справедливы соотношения:

$$B_1 \subseteq A_1 \cup (A_1\Delta B_1),\ B_2 \subseteq A_2 \cup (A_2\Delta B_2),\ B \subseteq A \cup (A\Delta B),$$

$$B_1 \cap B_2 \subseteq (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2),\ A\Delta B \subseteq (A_1\Delta B_1) \cup (A_2\Delta B_2).$$

Следовательно,

$$m'(B_1) \le l^*(A_1) + l^*(A_1\Delta B_1) \le l^*(A_1) + \varepsilon,$$

$$m'(B_2) \le l^*(A_2) + l^*(A_2\Delta B_2) \le l^*(A_2) + \varepsilon,$$

$$m'(B_1 \cap B_2) \le l^*(A_1\Delta B_1) + l^*(A_2\Delta B_2) \le 2\varepsilon,$$

$$l^*(A\Delta B) \le l^*(A_1\Delta B_1) + l^*(A_2\Delta B_2) \le 2\varepsilon,$$

$$l^*(B) \leq l^*(A) + l^*(A\Delta B) \leq l^*(A) + 2\varepsilon,$$

то есть $l^*(A) \geq m'(B) - 2\varepsilon$. Далее,

$$l^*(A) \geq l^*(B) - 2\varepsilon = m'(B) - 2\varepsilon =$$

$$= m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2) - 2\varepsilon \geq l^*(A_1) + l^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, то $l^*(A) \geq l^*(A_1) + l^*(A_2)$. Обратное неравенство выполняется в силу свойств внешней меры. ■

Предложение 26 *Объединение счетного множества измеримых по Лебегу множеств измеримо по Лебегу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

A_i — измеримы по Лебегу; $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus B_1$,..., $B_i = A_i \setminus B_{i-1}$,... Тогда

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i,$$

B_i — измеримы по Лебегу и попарно не пересекаются. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_L(B_i) = \mu_L\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \leq l^*(A) < +\infty,$$

то есть ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_L(B_i)$$

сходится. Выберем натуральное r так, чтобы

$$\sum_{i=r+1}^{\infty} \mu_L(B_i) \leq \varepsilon.$$

Обозначим

$$C := \bigcup_{i=1}^{r} B_i$$

и подберем элементарное B так, чтобы $l^*(C\Delta B) \leq \varepsilon$. Тогда из включения

$$A\Delta B \subseteq (C\Delta B) \cup \bigcup_{i=r+1}^{\infty} B_i$$

следует , что

$$l^*(A\Delta B) \leq l^*(C\Delta B) + \sum_{i=r+1}^{\infty} \mu_L(B_i)s < 2\varepsilon.$$

Это и доказывает предложение. ■

Следствие 8 *Пересечение счетного множества измеримых по Лебегу множеств измеримо по Лебегу.*

Справедливость следствия вытекает из соотношения

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = E_N \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(E_N \setminus A_i).$$

2.3.5. Сравнение мер Жордана и Лебега. Если A — произвольное подмножество E_N, то

$$g_*(A) \leq l_*(A) \leq l^*(A) \leq g^*(A).$$

Действительно, трудность в проверке этих неравенств может представлять лишь первое неравенство. Убедимся в его выполнимости. Так как

$$g_*(A) = m(E_N) - g^*(E_N \setminus A),$$

$$l_*(A) = m(E_N) - l^*(E_N \setminus A)$$

и выполняется очевидное неравенство

$$g^*(E_N \setminus A) \geq l^*(E_N \setminus A),$$

то $g_*(A) \leq l_*(A)$. Из этих неравенств вытекает

Предложение 27 *Если $A \subseteq E_N$ измеримо по Жордану, то оно измеримо по Лебегу и*

$$\mu_G(A) = \mu_L(A).$$

Рассмотрим пример множества $A \subseteq E_N$ измеримого по Лебегу, но неизмеримого по Жордану.

Пусть A — множество точек из E_N с рациональными координатами. Если элементарное множество B удовлетворяет условию $A \subseteq B \subseteq E_N$, то $B = E_N$. Значит, $g^*(A) = m(E_N) = (2N)^n$. С другой стороны, если $E_N \setminus A \subseteq B \subseteq E_N$, то опять $B = E_N$. Значит, $g^*(E_N \setminus A) = (2N)^n - (2N)^n = 0$. Таким образом, $g^*(A) \geq g_*(A)$, то есть $g^*(A) \geq g_*(A)$ и A — измеримо по Жордану.

Вместе с тем, A — счетное множество, значит, его элементы мы можем записать в виде последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. Свяжем с каждым элементом a_i произвольный промежуток I_i, его содержащий и имеющий меру $m(I_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^i}$. Система промежутков $\{I_i\}$ покрывает A, значит,

$$l^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $l^*(A) = 0$. Отсюда вытекает, что $0 \leq l_*(A) \leq l^*(A) \leq 0$, то есть A — измеримо по Лебегу и его мера Лебега равна нулю.

2.3.6. Счетная аддитивность и непрерывность меры Лебега. Как и мера Жордана мера Лебега обладает свойством счетной аддитивности.

Предложение 28 *Если*

$$A = \coprod_{i=1}^{\infty} A_i$$

и A_i — измеримы по Лебегу, то

$$\mu_L(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_L(A_i).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого натурального r имеем

$$\mu_L\left(\coprod_{i=1}^{r} A_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \mu_L(A_i) \leq \mu_G(A).$$

Перейдем к пределу при $r \to \infty$. Получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_L(A_i) \le \mu_L(A).$$

С другой стороны, счетная полуаддитивность внешней меры Лебега влечет выполнимость обратного неравенства. Предложение доказано. ■

Предложение 29 (непрерывность). *Если*

$$E_N \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$$

— последовательность вложенных друг в друга измеримых по Лебегу множеств, то

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

— измеримо по Лебегу и

$$\mu_L(A) = \lim_{i\to\infty} \mu_L(A_i) = \inf_i \mu_L(A_i).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $A = \emptyset$. Тогда

$$A_1 = \coprod_{j=1}^{\infty} (A_j \setminus A_{j+1}), \;\; A_i = \coprod_{j=i}^{\infty} (A_j \setminus A_{j+1}).$$

В силу счетной аддитивности меры Лебега имеем

$$\mu_L(A_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_L(A_j \setminus A_{j+1}), \;\; \mu_L(A_i) = \sum_{j=i}^{\infty} \mu_L(A_j \setminus A_{j+1}),$$

где второй ряд является остатком первого. Так как первый ряд сходится, то $\mu_L(A_i) \to 0$, то есть $\lim_{i\to\infty} \mu_L(A_i) = \inf_i \mu_L(A_i) = 0$. Но это и требовалось доказать. Пусть теперь $A \neq \emptyset$. Заменим множества A_i на множества $A_i \setminus A =: B_i$. Тогда $B_1 \supseteq B_2 \supseteq ...$ и

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \emptyset.$$

По доказанному выше имеем $\lim_{i\to\infty} \mu_L(B_i) = \inf_i \mu_L(B_i) = 0$. С другой стороны, $\mu_L(A_i) = \mu_L(B_i) + \mu_L(A)$, значит, $\lim_{i\to\infty} \mu_L(A_i) = \inf_i \mu_L(A_i) = \mu_L(A)$. ■

Следствие 9 *Если* $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq E_N$, A_i — *измеримы по Лебегу, то*

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

— *измеримо по Лебегу и*

$$\mu_L(A) = \lim_{i\to\infty} \mu_L(A_i) = \sup_i \mu_L(A_i).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения вытекает из соотношений

$$\mu_L(A) = m(E_N) - \mu_L(E_N \setminus A),\ \mu_L(A_i) = m(E_N) - \mu_L(E_N \setminus A_i)$$

и включений

$$E_N \supseteq E_N \setminus A_1 \supseteq E_N \setminus A_2 \supseteq ... .$$

■

Упражнение 14 *Докажите, что всякое счетное множество в* E_N *измеримо по Лебегу и имеет меру* 0.

Упражнение 15 *Пусть* $A \subseteq E_N$ — *измеримо по Лебегу. Докажите, что для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдутся замкнутое множество* F *и открытое множество* G *такие, что*

$$F \subseteq A \subseteq G,\ \mu_L(G \setminus F) \le \varepsilon.$$

2.3.7. Случай неограниченных множеств. Неограниченное множество $A \subseteq \mathbf{R}^n$ называется *измеримым* по Лебегу, если при любом натуральном N измеримо по Лебегу множество $A \cap E_N$. В этом случае мерой Лебега множества А принято называть число

$$\mu_L(A) = \sum_{N=1}^{\infty} \mu_L(A \cap E_N) \le +\infty.$$

Мера Лебега неограниченного множества может принимать и бесконечные значения, например, $A = \mathbf{R}^n$ — измеримо по Лебегу и при этом $\mu_L(\mathbf{R}^n) = +\infty$.

Упражнение 16 *Убедитесь, что все свойства меры Лебега остаются справедливыми при ее распространении на неограниченные измеримые множества в* $\mathbf{R}^n$.

2.3.8. Измеримость открытых, замкнутых и борелевских множеств. Пусть A — открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Тогда A можно представить в виде объединения некоторой счетной совокупности промежутков. Поэтому в силу предложения 26 множество A измеримо по Лебегу. Дополнение к замкнутому множеству — открыто. Значит, измеримо по Лебегу и каждое замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$.

Множество в $\mathbf{R}^n$ называется *борелевским*, если оно может быть получено из открытых и замкнутых множеств используя конечные или счетные объединения и пересечения. Из предложения 26 и его следствия вытекает, что всякое борелевское множество измеримо по Лебегу.

3 Дополнение

3.1 Другое определение булевой алгебры

3.1.1. Определение булевой алгебры. Существуют другие определения булевых алгебр [6]. Возникновение новых аксиоматик всегда связано со стремлением попробовать, нельзя ли в том или ином отношении упростить аксиоматику. Это стремление выразилось в создании многих различных определений булевых алгебр. Рассмотрим здесь одно из таких определений. В этом определении используется известное положение в алгебре Буля: любая из двух бинарных булевых операций — сумма и произведение — может быть выражена через другую и унарную операцию дополнения (соотношения $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ и $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$).

Если $\mathbf{A}$ — булева алгебра, то $\mathbf{A}$ содержит не менее чем два различных элемента 0 и 1. Кроме того, бинарная операция умножения и унарная операция дополнения имеют следующие свойства:

1) $AB = BA$;

2) $(AB)C = A(BC)$;

3) если $A\overline{B} = C\overline{C}$ для некоторого $C \in \mathbf{A}$, то $AB = A$;

4) если $AB = A$, то $A\overline{B} = C\overline{C}$ для всех $C \in \mathbf{A}$.

Первые два свойства —аксиомы из данного нами определения алгебры Буля, а последние два являются теоремами. Докажите их в качестве упражнения.

Мы покажем сейчас, что перечисленные свойства 1)–4) можно положить в основу нового определения алгебры Буля, т. е. доказать, что первичным терминам первоначального определения алгебры Буля можно дать определения, а аксиомы этого определения можно доказать как теоремы.

Дадим точную формулировку нового определения алгебры Буля. Под алгеброй Буля понимается произвольный класс $\mathbf{A}$ объектов $A, B, C, ...$, в котором определены одна бинарная операция «$\cdot$» — умножение и одна унарная операция $\overline{A}$ — дополнение A, со следующими свойствами:

$1)'$ класс $\mathbf{A}$ содержит не менее двух объектов;

$2)'$ для произвольных объектов $A, B \in \mathbf{A}$ выполняется соотношение

$$AB = BA$$

(коммутативность);

$3)'$ для произвольных объектов $A, B, C \in \mathbf{A}$ выполняется соотношение

$$(AB)C = A(BC)$$

(ассоциативность);

$4)'$ если $A, B, C \in \mathbf{A}$ и $A\overline{B} = C\overline{C}$, то $AB = A$;

$5)'$ если $A, B \in \mathbf{A}$ и $AB = A$, то $A\overline{B} = C\overline{C}$ для всех $C \in \mathbf{A}$.

3.1.2 Обоснование определения. Используя новое определение алгебры Буля, можно все аксиомы из первоначального определения алгебры Буля доказать как теоремы. Обоснование этого утверждения представляет собой цепь отдельных рассуждений, каждое из которых представляет собой формулировку и доказательство отдельного свойства.

Свойство 1^0. *Для любого $A \in A$ выполняется соотношение*

$$A \cdot A = A.$$

Действительно, для любого $A \in \mathbf{A}$ выполняется соотношение $A \cdot \overline{A} = A \cdot \overline{A}$. Значит, по аксиоме $4)'$ имеем $A \cdot A = A$.

Свойство 2^0. *Если $A, B \in A$, то*

$$A \cdot \overline{A} = B \cdot \overline{B}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из свойства 1^0 вытекает, что $AA = A$. Значит, по аксиоме $5)'$ имеем $A \cdot \overline{A} = B \cdot \overline{B}$.

Дадим определение н у л я и е д и н и ц ы:

$$0 := A \cdot \overline{A}, \ 1 := \overline{0}.$$

Свойство 3^0. *Для любого $A \in A$ выполняется соотношение*

$$A \cdot 0 = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $A \in \mathbf{A}$ имеем $A \cdot 0 = A \cdot (A \cdot \overline{A})$. По аксиоме $3)'$ $A \cdot (A \cdot \overline{A}) = (A \cdot A) \cdot \overline{A}$. Значит, по свойству 1^0 имеем $A \cdot 0 = A \cdot \overline{A} = 0$.

Свойство 4^0. *Для любого $A \in A$ выполняются соотношения:*

$$\overline{\overline{A}} \cdot A = \overline{\overline{A}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $A \in \mathbf{A}$ по определению нуля имеем $\overline{A} \cdot \overline{\overline{A}} = 0$. В силу коммутативности умножение $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{A} = 0$. Значит, $\overline{\overline{A}} \cdot \overline{A} = A \cdot \overline{A}$. По аксиоме $4)'$ имеем $\overline{\overline{A}} \cdot A = \overline{\overline{A}}$.

Свойство 5^0. *Для любого $A \in A$ выполняется соотношение*

$$\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} \cdot A = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству 4^0 имеем $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} \cdot \overline{\overline{A}}$. Отсюда вытекает, что $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} \cdot A = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} \cdot \overline{\overline{A}} \cdot A = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} \cdot \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}$. Следовательно, $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} \cdot A = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}$.

Свойство 6^0. *Для любого $A \in A$ выполняется соотношение*

$$\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По аксиоме $5)'$ из равенства $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} \cdot A = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}$ вытекает равенство $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} \cdot \overline{A} = 0$. Отсюда по аксиоме $2)'$ $\overline{A} \cdot \overline{\overline{\overline{\overline{A}}}} = 0$ и по аксиоме $4)'$ имеем $\overline{A} \cdot \overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$. При этом по свойству 4^0 $\overline{\overline{\overline{A}}} \cdot \overline{A} = \overline{\overline{\overline{A}}}$. Следовательно, $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$.

Свойство 7^0. *Для любого $A \in A$ выполняется соотношение*

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству 6^0 имеем $A \cdot \overline{\overline{\overline{A}}} = A \cdot \overline{A}$. По аксиоме $4)'$ $A \cdot \overline{\overline{A}} = A$. Но по свойству 4^0 $\overline{\overline{A}} \cdot A = \overline{\overline{A}}$, значит, $\overline{\overline{A}} = A$.

Свойство 8^0. *Для любого $A \in A$ выполняется соотношение*

$$A \cdot 1 = A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С одной стороны, $A\cdot 1 = A\cdot\overline{0} = A\cdot\overline{A\cdot\overline{A}}$. С другой стороны, $A\cdot\overline{\overline{A\cdot\overline{A}}} = A\cdot(A\cdot\overline{A}) = 0$. Значит, по аксиоме $4)'$ $A\cdot\overline{A\cdot\overline{A}} = A$.

Свойство 9^0. $0\neq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $0=1$. Тогда $0 = A\cdot 0 = A\cdot 1 = A$. Это противоречит аксиоме $1)'$.

Дадим определение бинарной операции с л о ж е н и я. Для любых $A, B\in\mathbf{A}$ положим

$$A+B := \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}.$$

Отметим, что из коммутативности операции умножения вытекает коммутативность операции сложения

$$A+B = B+A.$$

Свойство 10^0. *Если* $A, B\in A$, *то*

$$\overline{A+B} = \overline{A}\cdot\overline{B},\quad \overline{A\cdot B} = \overline{A}+\overline{B}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству 7^0 имеем

$$\overline{A+B} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}}} = \overline{A}\cdot\overline{B},\quad \overline{A\cdot B} = \overline{\overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}}} = \overline{A}+\overline{B}.$$

Свойство 11^0. *Если* $A, B, C\in A$, *то*

$$A+(B+C) = (A+B)+C.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя свойство 7^0, получаем:

$$A+(B+C) = A+\overline{\overline{B}\cdot\overline{C}} = \overline{\overline{A}\cdot\overline{\overline{\overline{\overline{B}\cdot\overline{C}}}}} = \overline{\overline{A}\cdot(\overline{B}\cdot\overline{C})} = \overline{(\overline{A}\cdot\overline{B})\cdot\overline{C}},$$

$$(A+B)+C = \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}+C = \overline{\overline{\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}}\cdot\overline{A}} = \overline{(\overline{A}\cdot\overline{B})\cdot\overline{C}}.$$

Свойство 12^0. *Если* $A\in A$, *то*

$$A+\overline{A} = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, $A+\overline{A} = \overline{\overline{A}\cdot\overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{A}\cdot A} = \overline{0} = 1$.

Свойство 13^0. *Если* $A\in A$, *то*

$$A+0 = A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, $A+0=\overline{\overline{A}\cdot\overline{0}}=\overline{\overline{A}\cdot 1}=\overline{\overline{A}}=A$.

Свойство 14^0. *Если $A,B\in A$, то*

$$A\cdot(A+B)=A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С одной стороны, $A\cdot(A+B)=A\cdot\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}$. С другой стороны,

$$A\overline{\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}}=A\cdot(\overline{A}\cdot\overline{B})=(A\cdot\overline{A})\cdot\overline{B}=0\cdot\overline{B}=0.$$

Значит, по аксиоме $4)'$ $A\cdot(A+B)=A\cdot\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}}=A$.

Свойство 15^0. *Если $A,B\in A$, то*

$$A\cdot\overline{A\cdot B}=A\cdot\overline{B}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, по определению нуля

$$0=A\cdot B\cdot\overline{A\cdot B}=A\cdot\overline{\overline{B}}\cdot\overline{A\cdot B}=A\cdot\overline{A\cdot B}\cdot\overline{\overline{B}}.$$

По аксиоме $4)'$ имеем

$$A\cdot\overline{A\cdot B}=A\cdot\overline{A\cdot B}\cdot\overline{B}=A\cdot\overline{B}\cdot(\overline{A}+\overline{B}).$$

Значит, по свойству 14^0 получаем $A\cdot\overline{A\cdot B}=A\cdot\overline{B}$.

Свойство 16^0. *Если $A,B\in A$, то соотношения $A\cdot B=A$, $A\cdot\overline{B}=0$ и $A+B=B$ эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. С одной стороны, эквивалентность первого и второго соотношений вытекает из аксиом $4)'$ и $5)'$. С другой стороны, если $A\cdot B=A$, то $A+B=A\cdot B+B=\overline{\overline{B}\cdot\overline{A\cdot B}}$. По свойству 15^0 $\overline{B}\cdot\overline{A\cdot B}=\overline{B}\cdot\overline{\overline{B}\cdot A\cdot B}$. Значит,

$$A+B=\overline{\overline{B}\cdot\overline{\overline{B}\cdot A\cdot B}}=\overline{\overline{B}\cdot\overline{0\cdot B}}=\overline{\overline{B}\cdot\overline{0}}=\overline{\overline{B}\cdot 1}=\overline{\overline{B}}=B.$$

Если же $A+B=B$, то по свойству 14^0 имеем $A\cdot(A+B)=A$. Значит, $A\cdot B=A\cdot(A+B)=A$.

Свойство 17^0. *Если $A,B,C\in A$ и $A\cdot C=A$ и $B\cdot C=B$, то*

$$(A+B)\cdot C=A+B.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По свойству 16^0 $A + C = C$ и $B + C = C$. Значит,

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + C = C.$$

По свойству 14^0

$$(A + B) \cdot C = (A + B) \cdot ((A + B) + C) = A + B.$$

Свойство $\mathbf{18^0}$. *Если $A, B, C \in A$, то*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,\ A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем первый дистрибутивный закон. Если $A, B, C \in \mathbf{A}$, то по свойству 10^0

$$(A \cdot (B + C)) \cdot \overline{A \cdot B + A \cdot C} = A \cdot (B + C) \cdot \overline{A \cdot B} \cdot \overline{A \cdot C}.$$

По свойствам 1^0 и 11^0 имеем

$$(A \cdot (B + C)) \cdot \overline{A \cdot B + A \cdot C} = (A \cdot \overline{A \cdot B}) \cdot (A \cdot \overline{A \cdot C}) \cdot (B + C).$$

Значит, по свойству 15^0

$$(A \cdot (B + C)) \cdot \overline{A \cdot B + A \cdot C} = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}(B + C) = A \cdot \overline{B + C} \cdot (B + C) = 0$$

и по свойству 16^0

$$(A \cdot (B + C))(A \cdot B + A \cdot C) = A \cdot (B + C). \tag{5}$$

С другой стороны, по свойству 14^0

$$A \cdot B \cdot (A \cdot (B + C)) = A \cdot B \cdot (B + C) = A \cdot B,$$

$$A \cdot C \cdot (A \cdot (B + C)) = A \cdot C \cdot (B + C) = A \cdot C.$$

Значит, по свойству 17^0

$$(A \cdot B + A \cdot C) \cdot (A \cdot (B + C)) = A \cdot B + A \cdot C. \tag{6}$$

Из (5) и (6) вытекает требуемое равенство.

Докажем второй дистрибутивный закон. Если $A, B, C \in \mathbf{A}$, то используя первый дистрибутивный закон, получаем

$$A + B \cdot C = \overline{\overline{A + B \cdot C}} = \overline{\overline{A} \cdot (\overline{B} + \overline{C})} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot \overline{C}} =$$

$$= \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot \overline{C}} = (A + B) \cdot (A + C).$$

3.2 Независимость аксиом булевой алгебры

Аксиомы нового определения булевой алгебры независимы. Доказательство этого утверждения требует для любого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ определение класса $\mathbf{A}_i$, который удовлетворял бы всем аксиомам $1)'$–$5)'$, кроме аксиомы $i)'$. Ниже даются определения пяти классов, доказывающих независимость аксиомы с соответствующим номером:

$\mathbf{A}_1 := \{A\}$, $A \cdot A := A$, $\overline{A} := A$;

$\mathbf{A}_2 := \{A, B, C\}$,

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & A & B & C \\ \hline A & A & A & A \\ B & A & B & B \\ C & A & C & C \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} - & \\ \hline A & B \\ B & A \\ C & A \end{array};$$

$\mathbf{A}_3 := \{A, B, C\}$,

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & A & B & C \\ \hline A & A & C & B \\ B & C & B & A \\ C & B & A & C \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} - & \\ \hline A & A \\ B & C \\ C & B \end{array};$$

$\mathbf{A}_4 := \{A, B\}$,

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & A & B \\ \hline A & A & B \\ B & B & B \end{array}, \qquad \begin{array}{c|c} - & \\ \hline A & B \\ B & B \end{array};$$

$\mathbf{A}_5 := \{A \in \beta(\mathbf{N}) : \mathbf{N} \setminus A$ — конечное множество$\}$, «$\cdot$» — пересечение множеств, $\overline{A} := A'' \cup [a+2]$, где $A' := \{1, ..., a\} \cap A$, $A'' := \{1, ..., a\} \setminus A'$, $[a] := \{x \in N : x \geq a\}$,

$$a := \begin{cases} \sup(\mathbf{N} \setminus A), & \text{если} \quad A \neq \mathbf{N}, \\ 0, & \text{если} \quad A = \mathbf{N}. \end{cases}$$

Упражнение 17 *Показать, что класс $\mathbf{A}_5$ удовлетворяет аксиомам $1)'$–$4)'$, но не удовлетворяет аксиоме $5)'$.*

Указание: *показать, что если $A = A' \cup [a+1]$, то $A \cap \overline{A} = [a+2]$, а если еще и $B = B' \cup [b+1]$, то*

$$A \cap \overline{B} = \begin{cases} (A \cap B'') \cup [b+2], & \textit{если} \quad a \leq b, \\ (A' \cap \overline{B}) \cup [a+1], & \textit{если} \quad a > b. \end{cases}$$

Упражнение 18 *Показать, что аксиомы* $1)'$–$4)'$ *образуют отдельное определение булевой алгебры, если их дополнить любой из следующих аксиом:*

$5)'_1$ *если* $A, B \in \mathbf{A}$, *то*

$$A\overline{A} = B\overline{B};$$

$5)'_2$ *если* $A \in \mathbf{A}$, *то*

$$\overline{\overline{A}} = A;$$

$5)'_3$ *существует такой объект* $M \in \mathbf{A}$, *что равенство* $AM = A$ *влечет равенство* $A + M$;

$5)'_4$ *существует такое целое число* $n > 1$, *что для вех* $A \in \mathbf{A}$

$$\overset{\equiv\}n}{A} = A$$

$5)'_5$ *если* $A, B \in \mathbf{A}$, *то неравенство* $A \leq B$ *влечет неравенство* $\overline{B} \leq \overline{A}$;

$5)'_6$ *класс* $\mathbf{A}$ *конечен.*

3.3 Другие подходы к аксиоматизации булевых алгебр

В 1933 году американский математик Хантингтон предложил следующую аксиоматизацию для булевых алгебр:

$1)''$ для произвольных объектов $A, B \in \mathbf{A}$ выполняется соотношение

$$A + B = B + A$$

(коммутативность);

$2)''$ для произвольных объектов $A, B, C \in \mathbf{A}$ выполняется соотношение

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

(ассоциативность);

$3)''$ для произвольных объектов $A, B \in \mathbf{A}$ выполняется соотношение

$$\overline{\overline{A} + B} + \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A$$

(уравнение Хантингтона).

Герберт Роббинс поставил следующий вопрос: можно ли сократить последнюю аксиому так, как написано ниже, то есть будет ли определённая выписанными ниже аксиомами структура булевой алгеброй?

Аксиоматизация алгебры Роббинса:

1)$'''$ для произвольных объектов $A, B \in \mathbf{A}$ выполняется соотношение

$$A + B = B + A$$

(коммутативность);

2)$'''$ для произвольных объектов $A, B, C \in \mathbf{A}$ выполняется соотношение

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

(ассоциативность);

3)$'''$ для произвольных объектов $A, B \in \mathbf{A}$ выполняется соотношение

$$\overline{\overline{A + B} + \overline{A + \overline{B}}} = A$$

(уравнение Роббинса).

Этот вопрос оставался открытым с 1930-х годов. В 1996 году Вильям МакКьюн, используя некоторые полученные до него результаты, дал утвердительный ответ на этот вопрос. Таким образом, любая алгебра Роббинса является булевой алгеброй.

.

Использованная литература

[1] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 6-е изд. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

[2] Вулих, Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств / Б. З. Вулих. – М. : Гос.изд-во матем. лит., 1961. – 408с.

[3] Сигорский, В. П. Математический аппарат инженера / В. П. Сигорский. – Киев : Техника, 1975. – 767 с.

[4] Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1981. – 2 т.

[5] Шишкин, А. Б. Теория функций комплексной переменной. Основы теории : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности 050201.65 – математика / А. Б. Шишкин. – Славянск-на-Кубани : ИЦ СГПИ, 2010. – 195 с.

[6] Столл, Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории / Р. Столл. – М. : Просвещение, 1968. – 232 с.

.

Учебное издание

ШИШКИН АНДРЕЙ БОРИСОВИЧ

Булевы алгебры. Меры Жордана и Лебега

Учебное пособие для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по естественно-математическим профилям
педагогического образования

Подписано в печать 17.06.2016 г.
Формат $60 \times 84/16$. Бумага типографская. Гарнитура «Компьютер Модерн».
Усл. п. л. 7,94. Уч.-изд. л. 8,42.
Тираж 100 экз. Заказ № 54.

Филиал Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани
353560, Краснодарский край, г. Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200
Отпечатано в издательском центре
филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани
353563, г. Славянск-на-Кубани, ул. Коммунистическая, 2